



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**  
**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A**  
**BIOMECHANIKY**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

# **ROVINNÉ RÁMY A ZKŘIVENÉ PRUTY.** **STUDIE VÝZNAMNOSTI Vlivu NORMÁLOVÉ A** **POSOUVAJÍCÍ SÍLY NA DEFORMACI STŘEDNICE**

PLANAR FRAMES AND CURVED BARS. STUDY OF THE SIGNIFICANCE OF THE INFLUENCE OF  
NORMAL AND SHEAR FORCES ON DEFORMATION CHARACTERISTICS OF THE CENTERLINE

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**  
BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**  
AUTHOR

**MARTIN DONÁT**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**doc. Ing. MIROSLAV SUCHÁNEK,**  
**CSc.**

BRNO 2008

**Citace**

DONÁT, M. Rovinné rámy a zakřivené pruty. Studie významnosti vlivu normálové a posouvající síly na deformaci střednice. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Miroslav Suchánek. CSc.

**Prohlášení**

Tímto prohlašuji, že tuto bakalářskou práci dělal sám pod vedením svého vedoucího pana doc. Ing. Miroslava Suchánka, CSc., na základě použité literatury.

V Brně 2. května 2008

Martin Donát

**Poděkování**

Těmito řádky bych rád poděkoval svému vedoucímu panu doc. Ing. Miroslavu Suchánkovi, CSc. za cenné rady, připomínky a čas, který mi při tvorbě této práce věnoval.

**Obsah**

<b>1. ÚVOD</b>	5
<b>2. TEORETICKÝ ZÁKLAD</b>	6
2.1. Lineární pružnost	6
2.1.1. Věty o superpozici	6
2.1.1.1. Věta o superpozici deformace	6
2.1.1.2. Věta o superpozici napjatosti	6
2.1.1.3. Věta o superpozici deformační práce	6
2.1.1.4. Věta o superpozici energie napjatosti	7
2.1.2. Castiglianova věta	7
2.2. Prut v pružnosti pevnosti	8
2.2.1. Předpoklady o geometrii	8
2.2.2. Předpoklady o vazbách a zatížení	9
2.2.3. Předpoklady o deformaci	9
2.2.4. Předpoklady o napjatosti	9
2.3. Klasifikace prutů	9
2.4. Schwedlerovy věty	10
2.5. Výpočet napjatosti	10
2.5.1. Výpočet napjatosti přímých prutů	11
2.5.2. Výpočet napjatosti zakřivených prutů	11
2.5.2.1. Výpočet napjatosti silně zakřivených prutů	11
2.5.2.2. Výpočet napjatosti slabě zakřivených prutů	12
2.5.3. Výpočet napjatosti lomených prutů	12
2.6. Energie napjatosti	13
2.6.1. Energie napjatosti akumulovaná v přímém prutu namáhaném tahem, ohybem a smykem	13
2.6.2. Energie napjatosti akumulovaná v zakřiveném prutu namáhaném tahem, ohybem a smykem	14
2.6.2.1. Energie napjatosti akumulovaná v silně zakřiveném prutu	14
2.6.2.2. Energie napjatosti akumulovaná ve slabě zakřiveném prutu	16
2.6.3. Energie napjatosti akumulované v lomeném prutu namáhaném tahem, ohybem a smykem	16
2.7. Deformační posunutí bodu střednice prutu	17
2.7.1. Deformační posunutí bodu střednice přímého prutu	18
2.7.2. Deformační posunutí bodu střednice zakřiveného prutu	18
2.7.2.1. Deformační posunutí bodu střednice silně zakřiveného prutu	18
2.7.2.2. Deformační posunutí bodu střednice slabě zakřiveného prutu	18
2.7.3. Deformační posunutí bodu střednice lomeného prutu	18
2.8. Využití symetrie a antimetrie prutů	19
<b>3. ŘEŠENÍ VZOROVÝCH ÚLOH</b>	20
3.1. Staticky určitě uložený nosník na dvou podporách	20
3.1.1. Staticky určitě uložený nosník na dvou podporách zatížený v polovině délky osamělou silou	20
3.1.1. Staticky určitě uložený nosník na dvou podporách zatížený v celé délce spojitě rozloženým zatížením	23
3.2. Vetknutý nosník	28
3.2.1. Vetknutý nosník zatížený na volném konci osamělou silou	28
3.2.2. Vetknutý nosník zatížený po celé délce spojitě rozloženým zatížením	31

3.3. Vetknutý zakřivený prut.....	35
3.3.1. Řešení s využitím teorie silně zakřivených prutů.....	36
3.3.2. Řešení s využitím teorie slabě zakřivených prutů.....	39
3.4. Uzavřený kroužek.....	43
3.4.1. Řešení s využitím teorie silně zakřivených prutů.....	43
3.4.2. Řešení s využitím teorie slabě zakřivených prutů.....	47
3.5. Rovinný rám.....	51
3.5.1. Řešení rovinného rámu s využitím předpokladu tuhých zlomů.....	51
3.5.2. Řešení rovinného v případě nahrazení zlomů rotačními vazbami.....	57
 <b>4. ZÁVĚR.....</b>	 63
 Vybrané symboly a označení .....	 64
Seznam použité literatury.....	65

## 1. ÚVOD

Má-li být strojírenský výrobek při provozu bezpečný a spolehlivý, musí být navržen tak, aby v průběhu jeho životnosti nenastal žádný mezní stav, který by ohrozil jeho činnost. Proto je důležité již ve fázi konstrukčního návrhu zvolit vhodný výpočtový model a ten konkretizovat tak, aby nebyl příliš složitý, ale přesto byl dostatečně přesný.

## 2. TEORETICKÝ ZÁKLAD

### 2.1. Lineární pružnost

Úloha pružnosti, pevnosti (dále jen PP) je lineární, když jsou splněny tyto podmínky :

- materiál tělesa je lineárně pružný
- deformace těles je malá
- složky tenzoru přetvoření jsou malé
- okrajové podmínky jsou lineární

V lineární PP jsou všechny parametry napjatosti a deformace lineárně závislé na vstupních parametrech (zatížení). [1]

V lineární PP jsou formulovány a platí :

- Věty o superpozici
- Věta o vzájemnosti prací ( Bettiho věta )
- Věta o vzájemnosti posuvů ( Maxwellova věta )
- Věta Castiglianova

Při odvozování vztahů a při řešení demonstračních příkladů budeme používat věty o superpozici a Castiglianovu větu, proto si je nyní rozebereme podrobněji.

#### 2.1.1. Věty o superpozici

##### 2.1.1.1. Věta o superpozici deformace

Deformace charakterizovaná úhlovými a rozměrovými posuvy bodů tělesa a přetvořeními v bodě tělesa  $\Omega$  zatíženého soustavou silových působení  $\Pi$  je v lineární PP dána superpozicí deformací vyvolaných jednotlivými prvky této soustavy. [1]

##### 2.1.1.2. Věta o superpozici napjatosti

Napjatost tělesa  $\Omega$  zatíženého soustavou silových působení  $\Pi$  je v lineární PP dána superpozicí napjatostí vyvolaných jednotlivými prvky této soustavy . [1]

##### 2.1.1.3. Věta superpozici deformační práce

Mějme soustavu silových působení  $\Pi$  tvořenou :

- osamělými silami  $\vec{F}_1 \dots \vec{F}_g$  [N]
- osamělými silovými dvojicemi  $\vec{M}_1 \dots \vec{M}_h$  [Nm]
- objemovými silami  $\vec{o}_i$  působícími v prostorových oblastech  $\Omega_{n_3}$  [N/m<sup>3</sup>]
- plošnými silami  $\vec{p}_j$  působícími v plošných oblastech  $\Gamma_{n_4}$  [N/m<sup>2</sup>]
- plošnými dvojicemi  $\vec{m}_{pk}$  působícími v plošných oblastech  $\Gamma_{n_5}$  [Nm/m<sup>2</sup>]
- liniovými silami  $\vec{q}_l$  působícími na křivkách  $g_{n_6}$  [N/m]
- liniovými dvojicemi  $\vec{m}_{qm}$  působícími na křivkách  $g_{n_7}$  [Nm/m]

Tato soustava silových působení koná deformační práci

$$A = \frac{1}{2} \sum_{g=1}^{n_1} F_g \cdot u_g + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n_2} M_h \cdot j_h + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_3} \int_{\Omega_k} o_i \cdot u_i dV + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_4} \int_{\Gamma_j} p_j \cdot u_j dS + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_5} \int_{\Gamma_k} m_{pk} \cdot j_k dS + \\ + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n_6} \int_{g_l} q_l \cdot u_l dl + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n_7} \int_{g_m} m_{qm} \cdot j_m dl \quad (2-1)$$

kde :

$u$  – značí posuv působíště osamělých nebo elementárních sil ve směru jejich nositelek vyvolaný působením soustavy silových působení  $\Pi$

$\varphi$  - značí natočení přímky pevně spojené s působíštěm osamělé nebo elementární silové dvojice vyvolané působením soustavou silových působení  $\Pi$

Celková deformační práce vykonaná soustavou silových působení  $\Pi$  je v lineární PP dána superpozicí deformačních prací vykonaných jednotlivými prvky této soustavy. [1]

#### 2.1.1.4. Věta o superpozici energie napjatosti

Je-li materiál tělesa lineárně pružný, je deformační práce vykonaná soustavou silových působení  $\Pi$  rovna energii napjatosti  $W$  akumulované v tělese  $\Omega$ .

Celková energie napjatosti akumulovaná v tělese  $\Omega$  zatíženém soustavou silových působení  $\Pi$  je v lineární PP dána superpozicí energií napjatostí akumulovaných v tělese od jednotlivých prvků této soustavy.

Množství energie napjatosti akumulované v tělese  $\Omega$  není závislé na historii zatěžování, ale pouze na aktuálním stavu soustavy silových působení  $\Pi$ , energie napjatosti je tedy stavovou funkcí. [1]

#### 2.1.2. Castiglianova věta

Zatěžujeme-li lineárně pružné těleso silovou soustavou  $\Pi$  tvořenou osamělými silami  $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_k, \dots, \vec{F}_n\}$  koná tato soustava v procesu zatěžování deformační práci  $A$ . Tato práce se v tělese akumuluje jako energie napjatosti  $W(\Pi) = A(\Pi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \cdot u_i$ . V tělese je energie napjatosti rozložena spojitě zpravidla nerovnoměrně. Zvětší-li se velikost silové soustavy o elementární přírůstky  $dF_i$ , pak energie napjatosti vzroste o přírůstek

$$dW(\Pi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(\Pi)}{\partial F_i} dF_i, \text{ který má charakter totálního diferenciálu. [1]}$$

Zvolme dvě zatěžovací historie :

1. Nejprve těleso zatížíme silovou soustavou  $\Pi$  a pak sílu  $\vec{F}_k$  zvětšíme o přírůstek  $d\vec{F}_k$  (Obr. 2.1.). Na konci procesu zatěžování je v tělese akumulována energie napjatosti



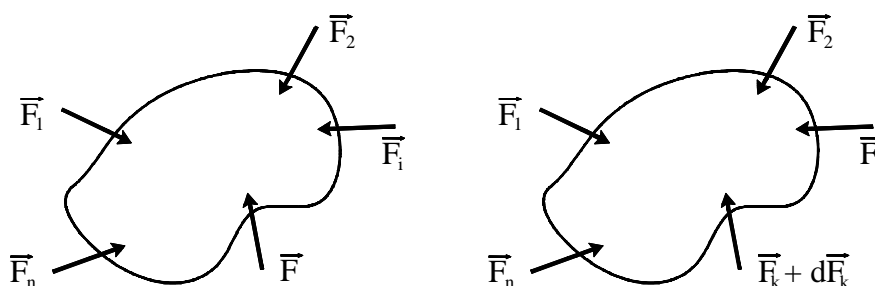
$$W(\Pi \cup dF_k) = W(\Pi) + \frac{\partial W}{\partial F_k} dF_k \quad (2-2)$$

2. nejprve těleso zatížíme přírůstkem síly  $d\vec{F}_k$  a pak silovou soustavou  $\Pi$ . Na konci procesu zatěžování je v tělese akumulován energie napjatosti

$$W(dF_k \cup \Pi) = \frac{1}{2} dF_k \cdot dw_k + dF_k \cdot w_k + W(\Pi) \quad (2-3)$$

Dvakrát elementární člen  $\frac{1}{2} dF \cdot dw$  lze zanedbat. Porovnáním energií napjatostí (2-2) a (2-3) dostaneme vztah

$$w_{F_k} = \frac{\partial W(\Pi)}{\partial F_k} \quad (2-4)$$



Obr. 2.1.

Podobným způsobem lze získat vztah pro deformační natočení přímky pevně spojené s působištěm silové dvojice o momentu  $M_m$

$$j_m = \frac{\partial W}{\partial M_m} \quad (2-5)$$

## 2.2. Prut v pružnosti pevnosti

Prut v PP je teoretickým modelem reálného tělesa, z hlediska napjatosti a deformace to je model nejjednoduššího typu, který je charakterizován souborem prutových předpokladů. Tyto předpoklady se týkají geometrie, zatížení, vazeb, deformace a napjatosti prutu [1] :

### 2.2.1 Předpoklady o geometrii

- Prut je jednoznačně určen střednicí  $\gamma$  a příčným průřezem  $\psi$
- Střednice  $\gamma$  je hladká spojitá křivka konečné délky
- Příčný průřez  $\psi$  je rovinná oblast kolmá na střednici
- Průsečíkem střednice a příčného průřezu je těžiště příčného průřezu
- Minimální délka střednice je alespoň rovna největšímu rozměru příčného průřezu

### 2.2.2. Předpoklady o vazbách a zatížení

- Vazby mohou omezovat pouze posuvy a natočení bodů střednice
- Zatížení je transformováno na střednici ve smyslu statické ekvivalence

### 2.2.3. Předpoklady o deformaci

- Střednice prutu zůstává hladkou a spojitou po celou dobu zatěžování
- Příčné průřezy zůstávají v průběhu deformace rovinné a kolmé na střednici

### 2.2.4. Předpoklady napjatosti

- Prutová napjatost je určena normálovým a smykovým napětím v příčném průřezu.

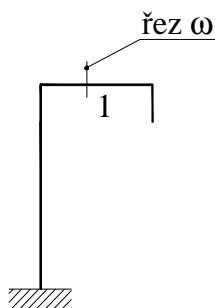
Tělesa, která z hlediska PP můžeme řešit jako pruty vykazují velkou různorodost a lze je členit podle různých hledisek [1], proto si nyní některá uvedeme.

## 2.3. Klasifikace prutů

Z geometrického hlediska pruty dělíme :

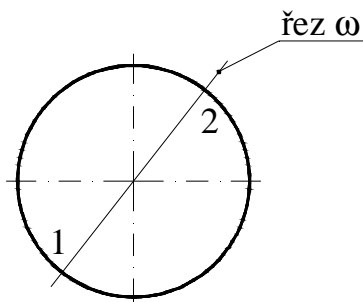
a) Podle uzavřenosti střednice

- otevřené – střednice je taková křivka, že prut lze rozdělit na dva prvky řezem určeným právě jedním bodem střednice [1] (viz Obr. 2.2.).



Obr. 2.2.

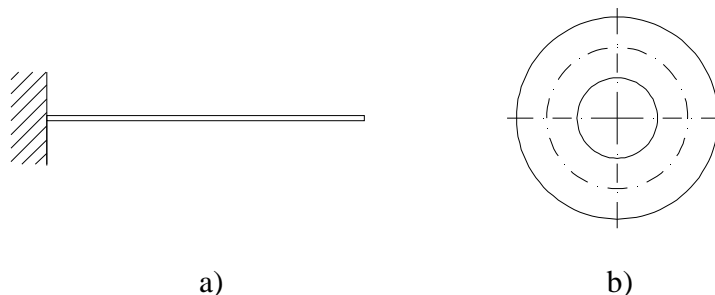
- uzavřené – ( n-krát ) – střednice prutu je taková křivka, že prut lze rozdělit na dva prvky řezem určeným právě  $n+1$  body střednice [1] (viz Obr. 2.3.)



Obr. 2.3.

b) podle tvaru střednice pruty dělíme na

- přímé (viz Obr. 2.4.a)
- zakřivené, ty se podle poměru poloměru zakřivení střednice a charakteristického rozměru průřezu dělí na pruty :
  - silně zakřivené (viz. Obr. 2.4.b)
  - slabě zakřivené (viz Obr. 2.3)
- lomené viz (Obr. 2.2.)



Obr. 2.4.

Dále také využijeme Schwedlerovy věty. V celé práci se budeme zabývat prutovými tělesy proto si tyto věty uvedeme ve tvaru který byl odvoze pro pruty jejichž střednicí je přímka.

## 2.4. Schwedlerovy věty

Pro pruty s přímkovou střednicí se Schwedlerovy věty uvádí ve tvaru:

$$\frac{d^2 M_o(x)}{dx^2} = \frac{dT(x)}{dx} = -q_T(x) \quad (2-6)$$

Z těchto vět plyne, že je-li nosník zatížen příčně na střednici je vždy namáhán kombinací ohybu a smyku.

Výpočet napjatosti prutu významně ovlivňuje tvar střednice , proto si jednotlivé případy nyní rozeberme.

## 2.5. Výpočet napjatosti

Při řešení rovinných úloh s příčně a podélně zatíženými pruty mohou být nenulové následující VVÚ : normálová síla  $N$ , ohybový moment  $M_o$  a posouvající síla  $T$ . Pro tato namáhání jsou odvozeny vztahy pro určení normálového a smykového napětí v příčném průřezu. [1]

## 2.5.1 Výpočet napjatosti přímých prutů

Napětí v příčném průřezu vyvolané normálovou silou  $N$  je dáno vztahem :

$$s_N = \frac{N}{S} \quad (2-7)$$

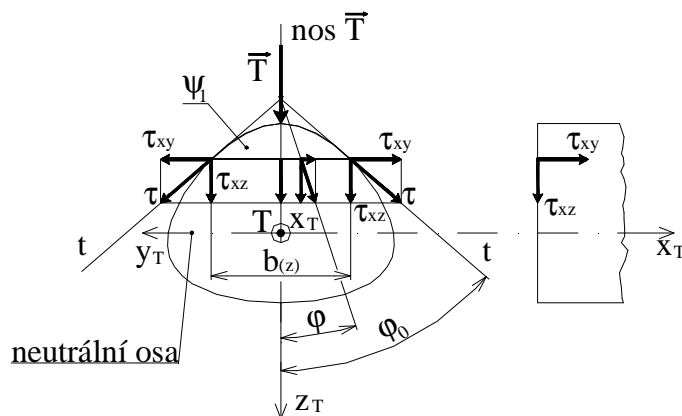
napětí vyvolané ohybovým momentem  $M_o$

$$s_{M_o} = \frac{M_o}{J_y} \cdot z \quad (2-8)$$

smykové napětí vyvolané posouvající silou  $T_z$

$$t(z) = \frac{T_z(x) \cdot U_{yy1}}{b(z) \cdot J_y \cdot \cos j_0} \quad (2-9)$$

- kde  $\psi_1$  označuje podoblast průřezu
- tento vztah je také nazýván Žuravského vzorcem, jeho použitelnost je u základního rovinného ohybu omezena pouze na případy kdy je nositelka posouvající síly  $\vec{T}_z$  totožná s osou symetrie průřezu
- $\varphi_0$  označuje úhel který svírá tečna k povrchu průřezu v místě kde určujeme smykové napětí  $\tau$  s normálou neutrální osy viz (Obr. 2.5.)
- u průřezů, jež mají v neutrální ose tečnu k obrysu rovnoběžnou s osou symetrie průřezu (obdélník, čtverec...) je extrémní smykové napětí ve všech bodech neutrální osy [1]. V těchto případech je úhel  $j_0 = 0^\circ$



Obr. 2.5.

## 2.5.2. Zakřivených prutů

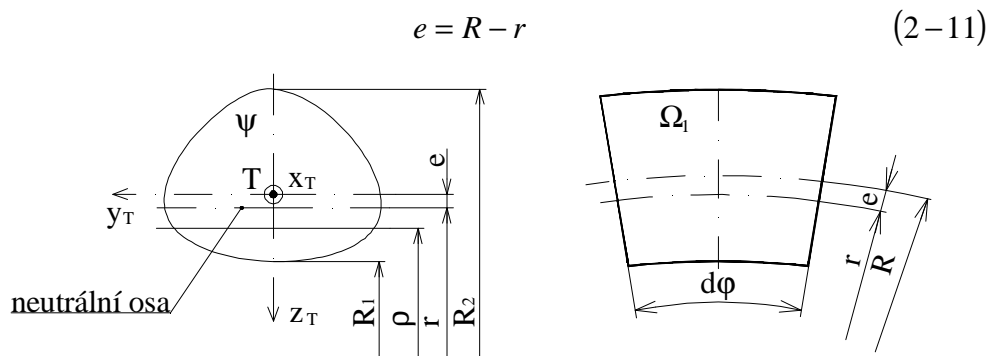
### 2.5.2.1. Výpočet napjatosti silně zakřivených prutů

U silně zakřivených prutů se napětí vyvolaná normálovou silou  $N$  a posouvající silou  $T$  určují ze stejných vztahů jako u prutů přímých, tedy podle (2-7) a (2-9)

Při výpočtu napětí od ohybového momentu  $M_o$  se však přihlíží k tomu, že neutrální osa není totožná s hlavní centrální osou průřezu  $y_t$ , napětí vyvolané  $M_o$  je tedy dáno vztahem.

$$S_{M_o} = \frac{M_o}{S \cdot e} \cdot \frac{z}{r - z} \quad (2-10)$$

kde excentricita  $e$  určuje polohu neutrální osy vzhledem k hlavní centrální ose průřezu  $y_t$  (viz Obr. 2.6.)



Obr. 2.6.

kde  $r$  určuje polohu neutrální osy průřezu a vypočítá se ze vztahu

$$r = \frac{S}{\int_y \frac{dS}{r}} \quad (2-12)$$

Pozn.: poloměr  $r \in \langle R_1, R_2 \rangle$  viz Obr. 2.6.

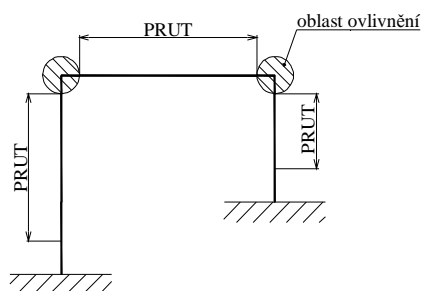
#### 2.5.2.2. Výpočet napjatosti slabě zakřivených prutů

U slabě zakřivených prutů je neutrální osa s dostatečnou přesností shodná s hlavní centrální osou průřezu  $y_t$ . Pro výpočet napětí v příčném průřezu slabě zakřiveného prutu jsou proto použitelné stejné vztahy jako pro pruty přímé (2-7), (2-8) a (2-9)

#### 2.5.3. Výpočet napjatosti lomených prutů

Lomený prut je těleso jehož střednice je spojitá po částech hladká křivka. Tyto části mohou být přímé nebo zakřivené [1], podle toho volíme i vztahy pro výpočet napjatosti.

V prosté PP můžeme řešit pouze ty lomené pruty jejichž celková délka střednice je výrazně větší než součet zlomy ovlivněných délek. V okolí zlomu nejsou splněny prutové předpoklady. Při řešení deformace a napjatosti aplikujeme Saint Venantův princip a jako prut řešíme pouze části dostatečně vzdálené od míst zlomů [1] (viz Obr. 2.7.).



Obr. 2.7.

## 2.6. Energie napjatosti

Celková energie napjatosti akumulovaná v tělese je dána vztahem

$$W = W_s + W_t \quad (2-13)$$

kde pro příspěvky energie napjatosti akumulované v prutu od normálových napětí  $s$  a smykových napětí  $t$  platí obecné vztahy :

$$W_s = \int \int \int \frac{s^2}{2E} dS ds \quad (2-14)$$

$$W_t = \int \int \int \frac{t^2}{2G} dS ds \quad (2-15)$$

Po dosazení konkrétních vyjádření napětí  $s$  a  $t$  z předchozí kapitoly do obecných vztahů (2-14) a (2-15) dostaneme vztahy pro výpočet energie napjatosti akumulované v jednotlivých typech prutů

### 2.6.1. Energie napjatosti akumulovaná v přímém prutu namáhaném tahem, ohybem a smykem

Složka energie napjatosti akumulovaná v přímém prutu o délce střednice  $g$  od normálních napětí vyvolaných ohybovým momentem  $M_o$  a normálovou silou  $N$  se vypočítá ze vztahu (2-14):

$$W_s = \frac{1}{2E} \int_{\Omega} s^2 dV = \frac{1}{2E} \int_{\Omega} (s_{M_o} + s_N)^2 dV = \frac{1}{2E} \int_{\Omega} (s_{M_o}^2 + 2s_{M_o} \cdot s_N + s_N^2) dV$$

dosadíme-li za  $\sigma_N$  vztah (2-7) a za  $\sigma_{M_o}$  vztah (2-8)

$$W_s = \frac{1}{2E} \int_g \left( \int_y \frac{M_o^2}{J_y^2} z^2 dS + 2 \int_y \frac{M_o \cdot N}{J_y \cdot S} \cdot z dS + \int_y \frac{N^2}{S^2} dS \right) dx$$

pro hlavní centrální souřadnicový systém platí  $\int_y z^2 \cdot dS = J_y$ ,  $\int_y z \cdot dS = U_{yT} = 0$  a  $\int_g dS = S$

potom

$$W_s = \frac{1}{2E} \left( \int_g \frac{M_o^2}{J_y} dx + \int_g \frac{N^2}{S} dx \right) \quad (2-16)$$

Energie napjatosti akumulovaná v přímém prutu o délce střednice  $g$  od smykových napětí vyvolaných posouvající silou  $T$  se určí ze vztahu (2-15) kde za  $t$  dosadíme (2-9)

$$W_t = \frac{1}{2G} \int_g \int_y \frac{U_y^2 \cdot T^2}{b_{(z)}^2 \cdot J_y^2} dS dx = \frac{1}{2G} \int_g \frac{T^2(x)}{S} \left( \int_y \frac{U_y^2 \cdot S}{b_{(z)}^2 \cdot J_y^2} dS \right) dx$$

integrál  $\int_y \frac{U_y^2 \cdot S}{b_{(z)}^2 \cdot J_y^2} dS$  lze označit jako bezrozměrný součinitel  $\beta$ , který je závislý na

průřezových charakteristikách. Pro obdélníkový příčný průřez je  $\beta = 1,2$ , pro kruhový průřez je  $\beta = 32/27$ . [1]

Energie napjatosti akumulovaná v tělese od smykových napětí se tedy určí ze vztahu

$$W_t = \frac{b}{2G} \int_g \frac{T^2}{S} dx \quad (2-17)$$

dosadíme-li do vztahu (2-13) ze vztahů (2-16) a (2-17) dostaneme vztah pro výslednou energii napjatosti akumulovanou v přímém prutu o délce střednice  $g$

$$W = \frac{1}{2E} \int_g \frac{M_o^2(x)}{J_y(x)} dx + \frac{1}{2E} \int_g \frac{N^2(x)}{S(x)} dx + \frac{b}{2G} \int_g \frac{T^2(x)}{S(x)} dx \quad (2-18)$$

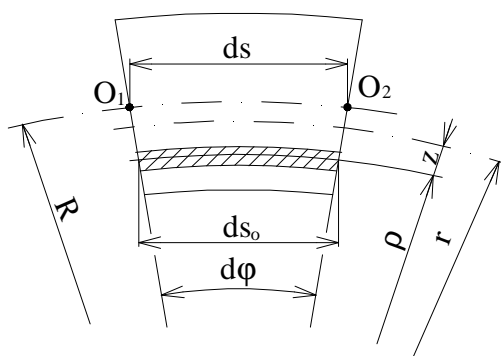
## 2.6.2. Energie napjatosti akumulovaná v zakřiveném prutu namáhaném tahem, ohybem a smykem

### 2.6.2.1. Energie napjatosti akumulovaná v silně zakřiveném prutu

Energie napjatosti akumulovaná v silně zakřiveném prutu o délce střednice  $g$  od normálových napětí vyvolaných ohybovým momentem  $M_o$  a normálovou silou  $N$  se určí analogicky jako v předchozím případě za  $\sigma_{M0}$  však budeme dosazovat vztah (2-10) [1] :

$$W_s = \frac{1}{2E} \iint \frac{M_o^2}{e^2 \cdot S^2} \cdot \frac{z^2}{(z-r)^2} dS ds_0 + \frac{1}{E} \iint \frac{M_o \cdot z}{e \cdot S \cdot (r-z)} \cdot \frac{N}{S} dS ds_0 + \iint \frac{N^2}{S^2} dS ds_0 \quad (2-19)$$

délka vlákna  $ds_0$  se mění v závislosti na poloměru  $\rho$ , proto bude vhodné když jeho velikost vztáhneme na délku úseku střednice prutu  $ds$  vymezenou body  $O_1, O_2$ , která zůstává v průběhu deformace konstantní (viz Obr. 2.8.).



Obr.2.8.

$$\left. \begin{aligned} ds &= R \cdot dj \\ ds_0 &= r \cdot dj = (r-z) \cdot dj \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{ds_0}{ds} = \frac{r-z}{R} \Rightarrow ds_0 = \frac{r-z}{R} \cdot ds$$

Integrál č. 1

$$\begin{aligned} \frac{1}{2E} \iint \frac{M_o^2}{e^2 \cdot S^2} \cdot \frac{z^2}{(z-r)^2} \cdot \frac{r-z}{R} dS ds &= \frac{1}{2E} \int \frac{M_o^2}{S^2 \cdot e^2 \cdot R} \left[ \int \frac{z^2}{r-z} dS \right] ds \\ - \int \frac{z^2}{r-z} dS &= \int \frac{z \cdot r}{r-z} \cdot dS - \int z \cdot dS = e \cdot S \text{ pak} \\ \frac{1}{2E} \int \frac{M_o^2}{S^2 \cdot e^2 \cdot R} \cdot e \cdot S ds &= \frac{1}{2E} \int \frac{M_o^2}{S \cdot e \cdot R} ds \end{aligned} \quad (2-20)$$

Integrál č. 2

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \iint \frac{M_o \cdot z}{e \cdot S \cdot (r-z)} \cdot \frac{N}{S} \cdot \frac{r-z}{R} dS ds &= \frac{1}{E} \int \frac{M_o \cdot N}{e \cdot S^2 \cdot R} \cdot \left( \int z dS \right) ds \\ - \int z dS &= -e \cdot S \end{aligned}$$

potom



$$\frac{1}{E} \int_g \frac{M_o \cdot N}{e \cdot S^2 \cdot R} \cdot (-e \cdot S) ds = -\frac{1}{E} \int_g \frac{M_o \cdot N}{S \cdot R} ds \quad (2-21)$$

Integrál č. 3

$$\frac{1}{2E} \iint_{g,y} \frac{N^2}{S^2} \cdot \frac{r-z}{R} dS ds = \frac{1}{2E} \int_g \frac{N^2}{S^2 \cdot R} \cdot \left[ \int_y (r-z) dS \right] ds = \frac{1}{2E} \int_g \frac{N^2}{S} ds \quad (2-22)$$

dosadíme-li nyní upravené integrály (2-20), (2-21), (2-22) do vztahu (2-19) dostaneme vyjádření energie napjatosti akumulované v průřezu od normálových napětí  $\sigma$

$$W_s = \frac{1}{2E} \int_g \frac{M_o^2}{e \cdot S \cdot R} ds - \frac{1}{E} \int_g \frac{M_o \cdot N}{S \cdot R} ds + \frac{1}{2E} \int_g \frac{N^2}{S} ds \quad (2-23)$$

Energie napjatosti akumulovaná v silně zakřiveném prutu od smykových napětí vyvolaných posouvají silou  $T$  se určí ze vztahu (2-17), dosadíme-li (2-17) a (2-23) do původního vztahu (2-13) dostaneme vztah pro výpočet celkové energie napjatosti akumulované v silně zakřiveném prutu

$$W = \frac{1}{2E} \int_g \frac{M_o^2(s)}{e \cdot S(s) \cdot R} ds - \frac{1}{E} \int_g \frac{M_o(s) \cdot N(s)}{S(s) \cdot R} ds + \frac{1}{2E} \int_g \frac{N^2(s)}{S(s)} ds + \frac{b}{2G} \int_g \frac{T^2(s)}{S(s)} ds \quad (2-24)$$

#### 2.6.2.2. Energie napjatosti akumulovaná ve slabě zakřiveném prutu

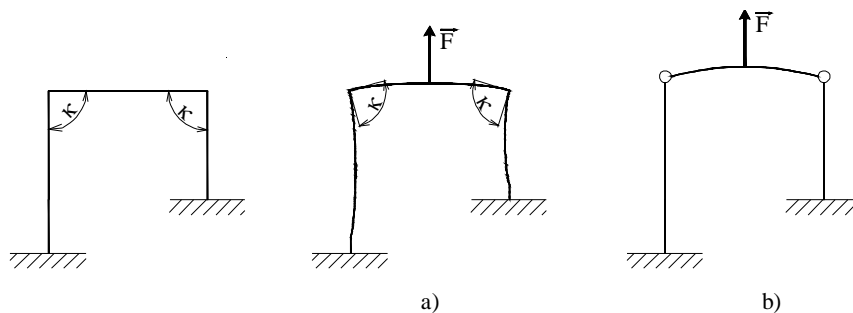
Jak již bylo definováno v předchozím odstavci pro slabě zakřivené pruty platí stejné vztahy jako pro pruty přímé, energie napjatosti akumulovaná ve slabě zakřiveném prutu se tedy vypočítá podle vztahu (2-18), tentokrát však musíme integrovat podél zakřivené střednice

$$W = \frac{1}{2E} \int_g \frac{M_o^2(s)}{J_y(s)} ds + \frac{1}{2E} \int_g \frac{N^2(s)}{S(s)} ds + \frac{b}{2G} \int_g \frac{T^2(s)}{S(s)} ds \quad (2-25)$$

#### 2.6.3 Energie napjatosti akumulovaná v lomeném prutu

U lomených prutů je potřeba definovat silově deformační závislosti pro každý zlom jako doplněk k prutovým předpokladům. Nejčastěji se omezujeme na dva limitní předpoklady [1] :

- tuhý zlom – pro který předpokládáme, že úhel tečen ke střednici ve zlomu je po zatížení zachován (viz Obr. 2.9.a)
- kloub – pro který se předpokládá, že ohybový moment v místě zlomu je nulový. Jedná se tedy o spojení prutů rotační vazbou. (viz Obr. 2.9.b)



Obr. 2.9.

Předpoklad tuhého zlomu se často používá při určování napjatosti a deformace rámu. Úhel tečen v místě zlomu zůstává po zatížení zachován, blízké okolí zlomu se tedy nedeformuje a energie napjatosti akumulovaná v tomto okolí je nulová. Celková energie napjatosti akumulovaná v lomeném prutu za předpokladu tuhých zlomů je tedy součet energií napjatostí akumulovaných v jednotlivých úsecích mimo oblastí ovlivněných zlomy

$$W = \sum_{i=1}^n W_i \quad (2-26)$$

kde  $n$  je počet úseků

Nahradíme-li tuhé zlomy klouby, bude lomený prut tvořen z  $n$  přímých, případně zakřivených prutů a celková energie napjatosti akumulovaná v tomto lomeném prutu bude součet energií napjatosti akumulovaných v jednotlivých prutech, platí pro ni tedy také vztah (2-26).

## 2.7. Deformační posunutí bodu střednice prutu

Řešíme-li deformační posunutí  $d$  bodu střednice prutu, ve kterém působí osamělá síla  $\vec{F}$ , vyjadřujeme energii napjatosti akumulovanou v prutu jako funkci této osamělé síly. V případě, že určujeme  $d$  v bodě střednice, kde v příslušném směru žádná síla nepůsobí, umístíme do tohoto bodu doplňkovou sílu  $\vec{F}_d$  nulové velikosti. energii napjatosti pak vyjadřujeme jako funkci této doplňkové síly [1]. Podobně postupujeme i v případě, kdy hledáme deformační natočení  $j$  přímky pevně spojené s působištem silové dvojice. V bodě, ve kterém nepůsobí žádná silová dvojice pak místo doplňkové síly  $\vec{F}_d$  používáme doplňkový moment  $\vec{M}_d$ , který má nulovou velikost.

Vztahy pro energii napjatosti akumulovanou v prutu od jednotlivých VVÚ lze psát v jednotném tvaru :  $W = \frac{1}{2} \int_g \frac{v^2}{K_y} ds$ , kde  $v$  označuje složku VVÚ a  $K_y$  je tuhost příčného průřezu při jednoduchém namáhání. Vztah (2-4) pro posuv určený Castiglianovou větou pak můžeme upravit do tvaru označovaného jako Maxwell – Mohrova varianta [1] :

$$w_F = \int_g \frac{v}{K_y} \cdot \frac{\partial v}{\partial F} ds \quad (2-27)$$

Analogicky lze také upravit vztah (2 – 5) pro natočení přímky pevně spojené s působištem silové dvojice o momentu  $\vec{M}$

$$j_M = \int_g \frac{v}{K_y} \cdot \frac{\partial v}{\partial M} ds \quad (2 - 28)$$

Dosazením ze vztahů pro energie napjatosti uvedených předchozí kapitole do vztahu (2 – 27) dostaneme vyjádření posuvů bodu střednice u jednotlivých typů prutů.

### 2.7.1. Deformační posunutí bodu střednice přímého prutu

$$d = \frac{1}{E} \int_g \frac{M_o(x)}{J_y(x)} \cdot \frac{\partial M_o(x)}{\partial F} dx + \frac{1}{E} \int_g \frac{N(x)}{S(x)} \cdot \frac{\partial N(x)}{\partial F} dx + \frac{b}{G} \int_g \frac{T(x)}{S(x)} \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial F} dx \quad (2 - 29)$$

kde jednotlivé integrály představují příspěvky VVÚ na deformační posunutí bodu od ohybového momentu  $M_o$ , normálové síly  $N$  a posouvající síly  $T$

### 2.7.2. Deformační posunutí bodu střednice zakřiveného prutu

#### 2.7.2.1. Deformační posunutí bodu střednice silně zakřiveného prutu

$$d = \int_g \frac{M_o(s)}{E \cdot e \cdot S(s) \cdot R} \cdot \frac{\partial M_o(s)}{\partial F} ds - \int_g \left[ \frac{M_o(s)}{E \cdot S(s) \cdot R} \cdot \frac{\partial N(s)}{\partial F} + \frac{N(s)}{E \cdot S(s) \cdot R} \cdot \frac{\partial M_o(s)}{\partial F} \right] ds + \int_g \frac{N(s)}{E \cdot S(s)} \cdot \frac{\partial N(s)}{\partial F} ds + \int_g \frac{b \cdot T(s)}{G \cdot S(s)} \cdot \frac{\partial T(s)}{\partial F} ds \quad (2 - 30)$$

kde jednotlivé integrály představují příspěvky VVÚ na deformační posunutí bodu od ohybového momentu  $M_o$ , členu  $M_o N$ , normálové síly  $N$  a posouvající síly  $T$

#### 2.7.2.2. Deformační posunutí bodů střednice slabě zakřiveného prutu

$$d = \frac{1}{E} \int_g \frac{M_o(s)}{J_y(s)} \cdot \frac{\partial M_o(s)}{\partial F} ds + \frac{1}{E} \int_g \frac{N(s)}{S(s)} \cdot \frac{\partial N(s)}{\partial F} ds + \frac{b}{G} \int_g \frac{T(s)}{S(s)} \cdot \frac{\partial T(s)}{\partial F} ds \quad (2 - 31)$$

kde jednotlivé integrály představují příspěvky VVÚ na deformační posunutí bodu od ohybového momentu  $M_o$ , normálové síly  $N$  a posouvající síly  $T$

### 2.7.3. Deformační posunutí bodu střednice lomeného prutu

Deformační posunutí bodu střednice lomeného prutu ve směru působící síly je dáno součtem deformačních příspěvků od jednotlivých VVÚ ve směru působení této síly.

$$d = \sum_{i=1}^n d_i \quad (2 - 32)$$

## 2.8. Využití symetrie a antimetrie prutů

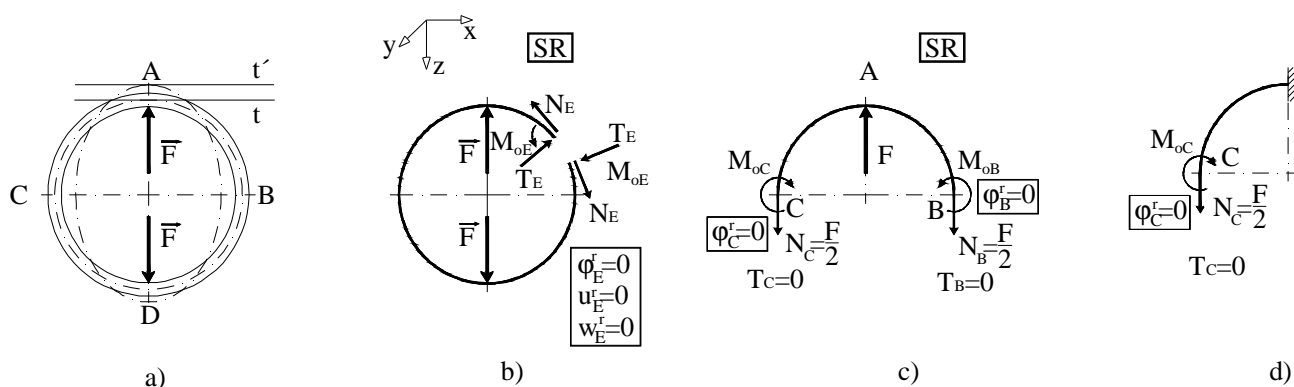
Při řešení prutů se setkáváme s případy, které jsou z hlediska geometrie, tuhosti, zatížení a vazeb symetrické, pak je symetrická i deformace a napjatost. Nebo jsou pruty symetrické z hlediska geometrie, tuhosti a vazeb a jsou zatíženy antimetricky, pak je deformace i napjatost rozložena po délce střednice antimetricky.

Při řešení symetricky resp. antimetricky zatížených prutů platí:

- u symetricky zatíženého prutu jsou v řezu vedeném osou symetrie nenulové pouze symetrické složky VVÚ, tj. normálová síla  $N$  a ohybový moment  $M_o$ . Antimetrické složky VVÚ, tj. posouvající síla  $T$  a kroutící moment  $M_k$ , jsou v tomto řezu nulové. [1]
- u antimetricky zatíženého prutu jsou v řezu vedeném osou antimetrie nenulové pouze antimetrické složky VVÚ, tj. posouvající síla  $T$  a kroutící moment  $M_k$ . Symetrické složky VVÚ, tj. normálová síla  $N$  a ohybový moment  $M_o$ , jsou tomto řezu nulové. [1]

Využití symetrie úlohy se projeví snížením operační složitosti a to především při řešení uzavřených prutů. Mějme volný uzavřený prut s kruhovou střednicí (viz Obr. 2.10.a.). Rovinné uzavřené pruty jsou vždy vnitřně třikrát staticky neurčité. Kdybychom zvolili obecný postup řešení, bylo by nutné nejprve provést otevření střednice v obecném bodě (viz Obr. 2.10.b), z podmínky zachování hladkosti střednice v místě řezu formulovat tři deformační podmínky omezující posunutí konců střednice ve směru os  $x$ ,  $z$  a rotaci kolem osy  $y$ . Z nich je možné určit VVÚ v daném řezu, jejich průběh podél střednice a vyřešit napjatost a deformaci prutu. Zavedeme-li však řez, který bude obsahovat osu symetrie, rozdělíme kroužek na dvě poloviny (viz Obr. 2.10.c.). V místech řezů působí podle výše uvedené poznámky o symetrii úlohy pouze normálové síly  $N_B$  a  $N_C$  a ohybové momenty  $M_{oB}$  a  $M_{oC}$ . Síly  $N_B$  a  $N_C$  určíme z podmínek vnější silové rovnováhy. K určení momentů  $M_{oB}$  a  $M_{oC}$  použijeme deformační podmínky omezující deformační natočení v místě řezu. V bodě A zůstává směrnice tečny po zatížení zachována, můžeme zde tedy zavést vetknutí. Analogicky by se postupovalo i v případě, kdyby řez procházel body A a D. Stačí tedy řešit libovolnou čtvrtinu kroužku, která je formálně vetknutá v jednom z bodů ležících na osách symetrie.

Z uvedeného postupu je patrné, že každá osa symetrie, kterou využijeme při řešení úlohy, snižuje operační složitost této úlohy o jeden stupeň.



Obr. 2.10.

### 3. ŘEŠENÍ VZOROVÝCH ÚLOH

#### 3.1. Staticky určité uložený nosník na dvou podporách

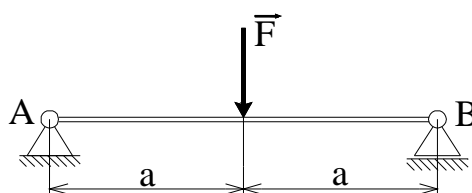
Zadání :

Je dán staticky určité uložený nosník kruhového průřezu. Úkolem je vyřešit vliv příspěvků jednotlivých složek VVÚ na deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice nosníku v závislosti na velikosti poměru délky střednice  $l$  prutu a charakteristického rozměru průřezu nosníku. Budeme řešit případy, kdy je nosník zatížen :

1. v polovině délky osamělou silou  $F$
2. po celé délce spojitě rozloženým zatížením  $q$

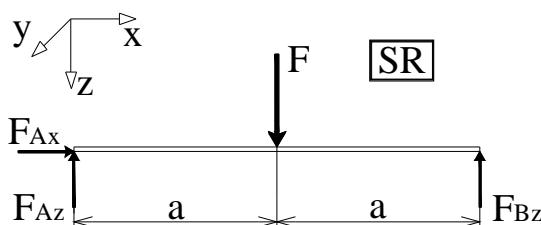
a oba případy porovnat

##### 3.1.1. Staticky určité uložený nosník na dvou podporách zatížení v polovině délky osamělou silou (Obr. 3.1.)



Obr. 3.1.

Z úplného uvolnění nosníku (viz Obr. 3.2.) určíme stykové výslednice



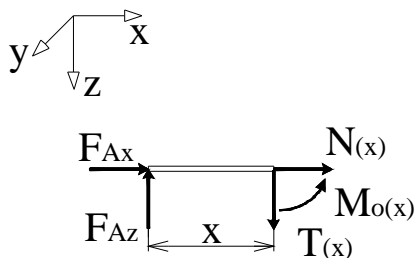
Obr. 3.2.

$$F_{Ax} = 0 \quad (3-1)$$

$$F_{Az} = F - F_{Bz} = \frac{F}{2} \quad (3-2)$$

$$F_{Bz} = \frac{F}{2} \quad (3-3)$$

VVÚ určíme z podmínek statické rovnováhy prvků uvolněných z nosníku (Obr. 3.3.) Úloha je symetrická, stačí tedy vyřešit pouze polovinu nosníku.



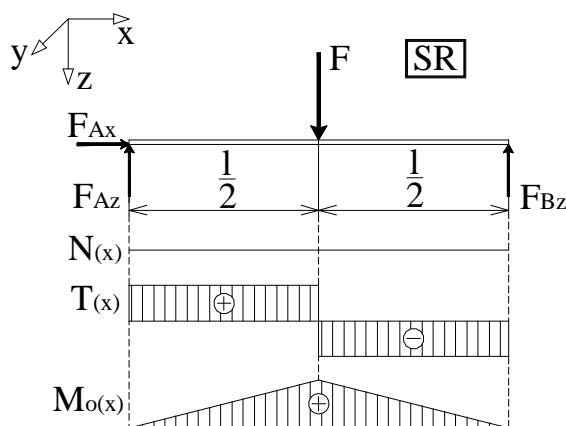
Obr. 3.3.

$$N(x) = 0 \quad (3-4)$$

$$T(x) = \frac{F}{2} \quad (3-5)$$

$$M_o(x) = \frac{F}{2} \cdot x \quad (3-6)$$

Průběh VVÚ po délce střednice je znázorněn na (Obr. 3.4.)



Obr. 3.4.

Ve zvoleném místě  $x = \frac{l}{2}$  působí síla  $F$ , pro určení deformačního posuvu použijeme

Castiglianovu větu. Jedná se o přímý prut, deformační posunutí střednice v místě působíště síly  $F$  určíme ze vztahu (2-29), do něhož dosadíme vztahy (3-4), (3-5) a (3-6).

$$w_F = \frac{1}{E} \int \frac{M_{oy}(x)}{J_y(x)} \cdot \frac{\partial M_{oy}(x)}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} dx + \frac{b}{G} \int \frac{T(x)}{S(x)} \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} dx$$

$$\begin{aligned}
 w_F &= \frac{1}{E} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{F \cdot x}{2 \cdot J_y} \cdot x dx + \frac{b}{G} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{F}{2 \cdot S} \cdot 1 dx = \frac{F}{2 \cdot E \cdot J_y} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx + \frac{b \cdot F}{2 \cdot G \cdot S} \int_0^{\frac{l}{2}} dx = \\
 &= \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J_y} + \frac{b \cdot F \cdot l}{4 \cdot G \cdot S}
 \end{aligned} \quad (3-7)$$

Získali jsme obecný vztah (3-7) pro výpočet deformačního posunutí střednice v místě působení síly  $F$ . Konkretizujeme-li ho nyní pro náš případ dosazením :

- $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + m)}$
- nosník má kruhový průřez  $J_y = \frac{p \cdot d^4}{64}$  ,  $S = \frac{p \cdot d^2}{4}$  ,  $\beta = 32/27$
- materiál nosníku je ocel  $\mu = 0,3$

$$w_F = \frac{64 \cdot F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot p \cdot d^4} + \frac{8 \cdot (1 + m) \cdot b \cdot F \cdot l}{4 \cdot E \cdot p \cdot d^2} = \frac{2F}{E \cdot p \cdot d} \cdot \left[ \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{l}{d} \right)^3 + b \cdot (1 + m) \cdot \left( \frac{l}{d} \right) \right]$$

Průhyb nosníku v polovině délky střednice je tedy popsán vztahem

$$w_F = \frac{2F}{E \cdot p \cdot d} \cdot \left[ \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{l}{d} \right)^3 + 1,54 \cdot \left( \frac{l}{d} \right) \right] \quad (3-8)$$

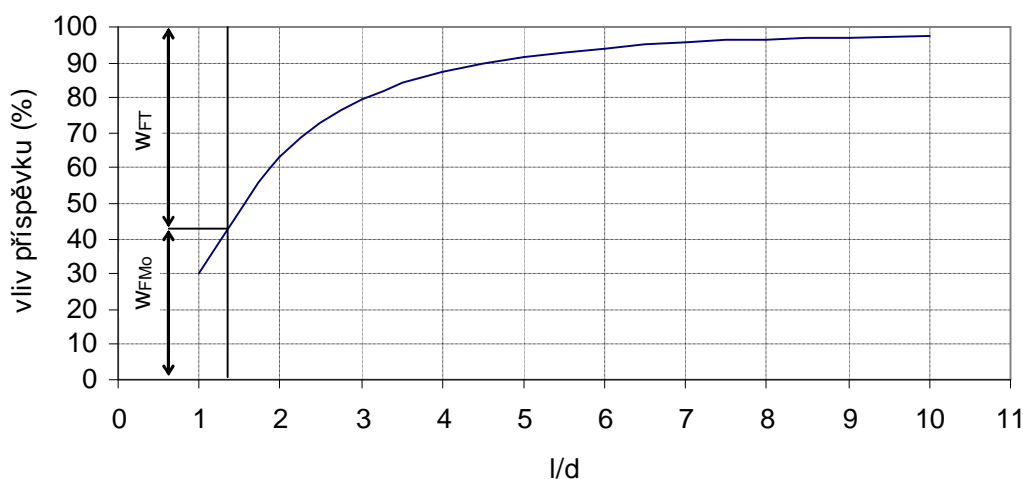
Členy v závorce vyjadřují příspěvky ohybového momentu  $M_o$  a posouvající síly  $T$  na deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice.

Z výsledného vztahu je patrné, že celkové deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice je podle věty o superpozici deformace dáno součtem deformačních příspěvků od ohybového momentu  $M_o$  a posouvající síly  $T$ . Velikost jednotlivých příspěvků je závislá na poměru délky střednice  $l$  a charakteristického rozměru průřezu, kterým je v našem případě průměr nosníku  $d$ . Vyneseme-li tuto závislost do grafu (viz Obr. 3.5.), vidíme, že při poměru  $l/d = 1$  má dominantní vliv na deformaci posouvající síla  $T$ , při poměru  $l/d = 2$  už je ale dominantní vliv ohybového momentu  $M_o$ , který dále narůstá se zvětšujícím se poměrem  $l/d$ .

Definujeme-li si nyní pro všechny příklady, které budeme řešit, 5% vliv příspěvku na deformační posunutí zvoleného bodu jako hranici nevýznamnosti, vidíme, že od poměru  $l/d = 7$  můžeme při výpočtu deformačního posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice u tohoto typu nosníku uvažovat pouze deformaci vyvolanou ohybovým momentem  $M_o$ .

l/d	vliv příspěvku	
	$M_o$ (%)	$T$ (%)
1	30,21	69,79
2	63,39	36,61
3	79,58	20,42
4	87,38	12,62
5	91,54	8,46
6	93,97	6,03
7	95,5	4,5
8	96,52	3,48
9	97,23	2,77
10	97,74	2,26

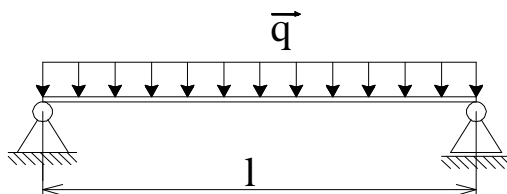
**Vliv příspěvků jednotlivých VVÚ na deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice nosníku**



Obr. 3.5.

Kde  $w_{FMo}$  a  $w_{FT}$  značí příspěvky ohybového momentu  $M_o$  a posouvající síly  $T$  na deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice.

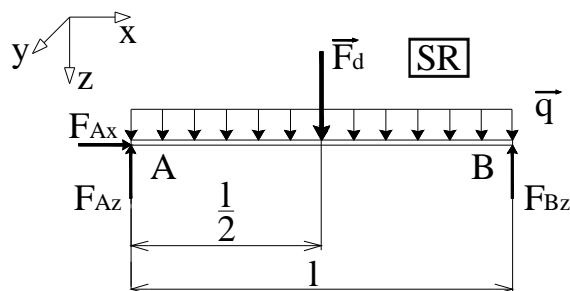
### 3.1.2. Staticky určité uložený nosník na dvou podporách zatížený po celé délce spojitě rozloženým zatížením (Obr. 3.6.)



Obr. 3.6.

Abychom mohli prošetřovat deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice s využitím Castiglianovy věty, musíme v tomto místě zavést doplňkovou sílu  $F_d$  (viz Obr. 3.7.) Postup řešení bude podobný jako v předchozím případě.





Obr. 3.7.

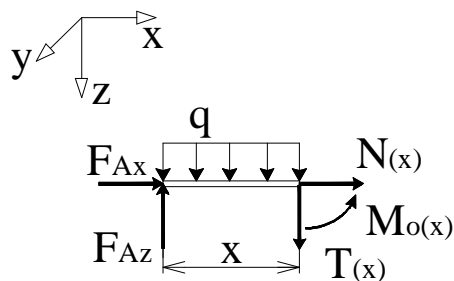
Stykové výslednice určíme z podmínek statické rovnováhy

$$F_{Ax} = 0 \quad (3-9)$$

$$F_{Az} = \frac{q \cdot l}{2} + \frac{F_d}{2} \quad (3-10)$$

$$F_{Bz} = \frac{q \cdot l}{2} + \frac{F_d}{2} \quad (3-11)$$

Úloha je symetrická, stačí tedy vyřešit pouze polovinu nosníku. VVÚ určíme jako funkce doplňkové síly  $\vec{F}_d$  z podmínek statické rovnováhy prvku, uvolněného z nosníku (Obr. 3.8.).



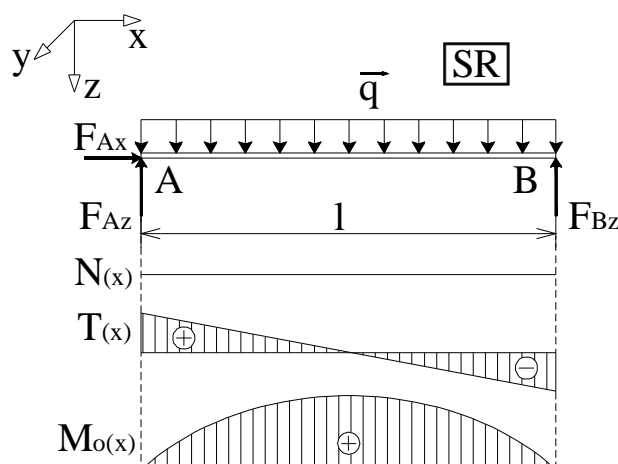
Obr. 3.8.

$$N(x) = 0 \quad (3-12)$$

$$T(x) = q \cdot \frac{l}{2} - q \cdot x + \frac{F_d}{2} \quad (3-13)$$

$$M_o(x) = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2 + \frac{F_d}{2} \cdot x \quad (3-14)$$

Průběh VVÚ po délce střednice je zobrazen na (Obr. 3.9.).



Obr. 3.9.

Jedná se o přímý prut, pro vyšetření deformačního posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice použijeme vztah (2–29), do něhož dosadíme vztahy (3–12), (3–13) a (3–14).

$$\begin{aligned}
 w_{F_d} &= \frac{1}{E} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_o(x)}{J_y(x)} \cdot \frac{\partial M_o(x)}{\partial \left( \frac{F_d}{2} \right)} dx + \frac{b}{G} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{T(x)}{S(x)} \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial \left( \frac{F_d}{2} \right)} dx \\
 &= \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^{\frac{l}{2}} \left( \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2 \right) \cdot x dx + \frac{b}{G \cdot S} \int_0^{\frac{l}{2}} \left( q \cdot \frac{l}{2} - q \cdot x \right) \cdot 1 dx = \\
 &= \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{q \cdot l}{2} \cdot x^2 - \frac{q}{2} \cdot x^3 dx + \frac{b}{G \cdot S} \int_0^{\frac{l}{2}} q \cdot \frac{l}{2} - q \cdot x dx = \\
 &= \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \left( \frac{q \cdot l^4}{48} - \frac{q \cdot l^4}{128} \right) + \frac{b}{G \cdot S} \cdot \left( \frac{q \cdot l^2}{4} - \frac{q \cdot l^2}{8} \right) \quad (3-15)
 \end{aligned}$$

Získali jsme obecný vztah (3–15) pro výpočet deformačního posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice. Konkretizujeme-li ho nyní pro náš případ dosazením :

- $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + m)}$
- nosník má kruhový průřez  $J_y = \frac{p \cdot d^4}{64}$  ,  $S = \frac{p \cdot d^2}{4}$  ,  $\beta = 32/27$
- materiál nosníku je ocel  $\mu = 0,3$

$$w_{F_d} = \frac{64}{E \cdot p \cdot d^4} \cdot \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384} + \frac{8 \cdot (1 + m) \cdot b}{E \cdot p \cdot d^2} \cdot \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{6 \cdot E \cdot p \cdot d^4} + \frac{(1 + m) \cdot b \cdot q \cdot l^2}{E \cdot p \cdot d^2}$$

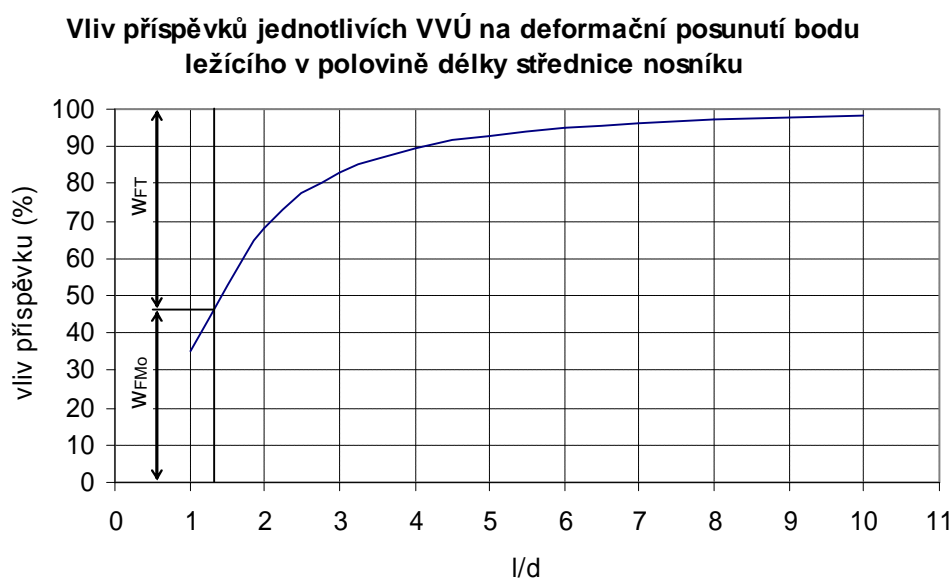
Deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice nosníku je tedy popsáno vztahem

$$w_{F_d} = \frac{q}{E \cdot p} \cdot \left[ \frac{5}{6} \left( \frac{l}{d} \right)^4 + 1,54 \cdot \left( \frac{l}{d} \right)^2 \right] \quad (3-16)$$

Členy v závorce vyjadřují příspěvky ohybového momentu  $M_o$  a posouvající síly  $T$  na deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice.

Z výsledného vztahu plyne podobný závěr jako v předchozím případě. Velikost deformačních příspěvků jednotlivých VVÚ je závislá na poměru délky střednice  $l$  a průměru nosníku  $d$ . Porovnáme-li vliv těchto příspěvků na deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice, dostaneme závislost (viz Obr. 3.10.), z ní plyne, že při určování velikosti průhybu v polovině délky střednice u tohoto typu nosníku můžeme od poměru  $l/d = 6$  uvažovat pouze deformaci způsobenou ohybovým momentem  $M_o$ .

l/d	vliv příspěvku	
	$M_o$ (%)	$T$ (%)
1	35,11	64,89
2	68,4	31,6
3	82,96	17,04
4	89,65	10,35
5	93,12	6,88
6	95,12	4,88
7	96,37	3,63
8	97,19	2,81
9	97,77	2,23
10	98,19	1,81



Obr. 3.10.

Kde  $w_{F_{M_o}}$  a  $w_{F_T}$  značí příspěvky ohybového momentu  $M_o$  a posouvající síly  $T$  na deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice.

Porovnejme nyní velikost vlivů příspěvků ohybového momentu  $M_o$  na deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice při zatížení osamělou silou a při spojitě rozloženém zatížení (viz Obr. 3.11.). Vidíme, že u spojitě zatíženého nosníku je vliv příspěvku ohybového momentu na posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice vyšší. Vysvětlení, proč tomu tak je, je potřeba hledat v průběhu VVÚ. U nosníku zatíženého

osamělou silou je posouvající síla  $T_F(x) = \frac{F}{2}$  a ohybový moment  $M_{oF}(x) = \frac{F}{2} \cdot x$ . U nosníku

se spojitě rozloženým zatížením je posouvající síla  $T_q(x) = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x$  a ohybový moment

$M_{oq}(x) = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2$ . Budeme-li uvažovat že  $F = q \cdot l$ , potom lze vztahy pro VVÚ spojitě

zatíženého nosníku upravit do tvaru:  $T_q(x) = \frac{F}{2} - q \cdot x = T_F(x) - q \cdot x$  a

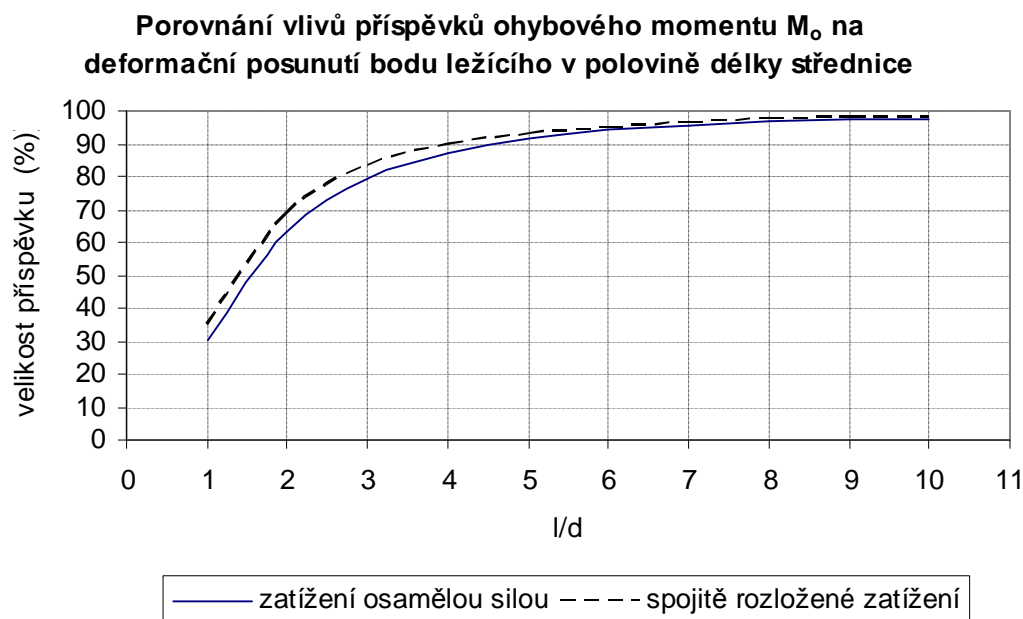
$M_{oq}(x) = \frac{F}{2} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2 = M_{oF}(x) - \frac{q}{2} \cdot x$ . Představíme-li si  $l$  jako jednotkovou délku ( $l = 1$ ),

je zřejmé, že  $x \in (0; 1)$  a tedy platí:  $x > x^2$ . Dosadíme-li za  $x$  konkrétní hodnotu a

porovnáme spolu poměry  $\frac{M_{oF}}{T_F}$ ,  $\frac{M_{oq}}{T_q}$  uvidíme, že  $\frac{M_{oq}}{T_q} > \frac{M_{oF}}{T_F}$ . Vliv příspěvku

ohybového momentu je tedy u spojitě zatíženého nosníku vyšší.

l/d	porovnání vlivů příspěvků $M_o$ (%) na deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice nosníku	
	zatížení osamělou silou	spojité zatížení
1	30,21	35,11
2	63,39	68,4
3	79,58	82,96
4	87,38	89,65
5	91,54	93,12
6	93,97	95,12
7	95,5	96,37
8	96,52	97,19
9	97,23	97,77
10	97,74	98,19



Obr. 3.11.

### 3.2. Vetknutý nosník

Zadání :

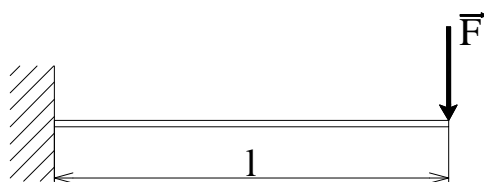
Je dán vetknutý nosník kruhového průřezu. Úkolem je vyřešit vliv příspěvků jednotlivých složek VVÚ na deformačním posunutí volného konce nosníku v závislosti na velikosti poměru délky střednice nosníku  $l$  a charakteristického rozměru průřezu nosníku.

Budeme řešit případy kdy je nosník zatížen :

1. na volném konci osamělou silou  $F$
2. po celé délce spojitě rozloženým zatížením  $q$

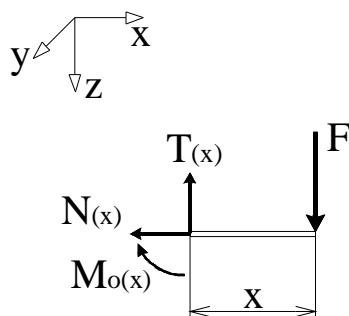
a oba případy porovnat.

#### 3.2.1. Vetknutý nosník zatížený na volném konci osamělou silou $F$ (Obr. 3.12.)



Obr. 3.12.

VVÚ určíme z podmínek statické rovnováhy prvku uvolněného z volného konce nosníku (Obr. 3.13.) Vyšetřujeme deformační posunutí konce nosníku, který je v tomto bodě zatížen silou  $F$ . Pro řešení můžeme tedy přímo použít Castiglianovu větu.



Obr. 3.13.

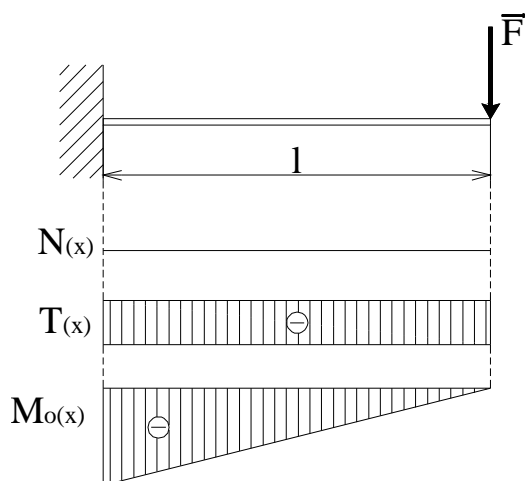
Ze statické rovnováhy prvku uvolněného od volného konce nosníku.

$$N(x) = 0 \quad (3-15)$$

$$T(x) = F \quad (3-16)$$

$$M_o(x) = -F \cdot x \quad (3-17)$$

Průběh VVÚ po délce střednice je vykreslen na (Obr. 3.14.).



Obr. 3.14.

Jedná se o přímý prut, pro vyšetření deformačního posunutí volného konce nosníku tedy použijeme vztah (2 – 29) do něhož dosadíme (3 – 15), (3 – 16) a (3 – 17).

$$\begin{aligned}
 w_F &= \frac{1}{E} \int_0^l \frac{M_o(x)}{J_y(x)} \cdot \frac{\partial M_o(x)}{\partial F} dx + \frac{b}{G} \int_0^l \frac{T(x)}{S(x)} \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial F} dx \\
 w_F &= \frac{1}{E} \cdot \int_0^l \frac{-F \cdot x}{J_y} \cdot (-x) dx + \frac{b}{G} \cdot \int_0^l \frac{F}{S} \cdot 1 dx = \frac{F}{E \cdot J_y} \cdot \int_0^l x^2 dx + \frac{b \cdot F}{G \cdot S} \cdot \int_0^l dx = \\
 &= \frac{F \cdot l^3}{3E \cdot J_y} + \frac{b \cdot F \cdot l}{G \cdot S} \quad (3-18)
 \end{aligned}$$

Získali jsme obecný vztah (3-18) pro výpočet deformačního posunutí působitě síly  $F$  vetknutého nosníku. Konkretizujeme-li ho nyní pro náš případ dosazením :

- $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + m)}$
- nosník má kruhový průřez  $J_y = \frac{p \cdot d^4}{64}$  ,  $S = \frac{p \cdot d^2}{4}$  ,  $\beta = 32/27$
- materiál nosníku je ocel  $\mu = 0,3$

$$w_F = \frac{64 \cdot F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot p \cdot d^4} + \frac{4 \cdot 2 \cdot (1 + m) \cdot b \cdot F \cdot l}{E \cdot p \cdot d^2} = \frac{8 \cdot F}{E \cdot p \cdot d} \cdot \left[ \frac{8}{3} \cdot \left( \frac{l}{d} \right)^3 + b \cdot (1 + m) \cdot \frac{l}{d} \right]$$

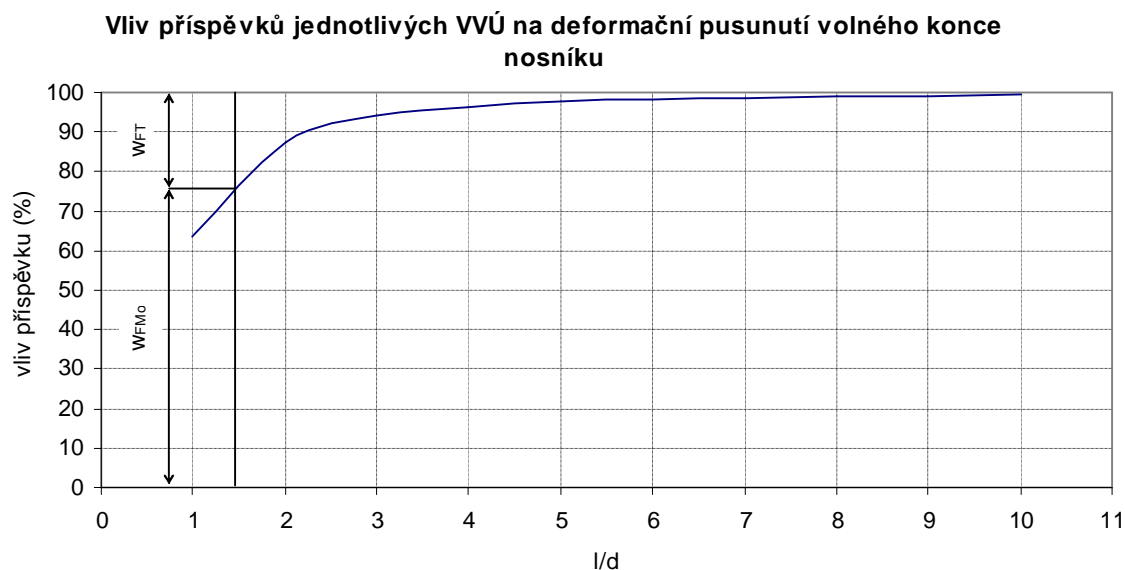
Celkový posun volného konce nosníku je tedy popsán vztahem

$$w_F = \frac{8F}{E \cdot p \cdot d} \cdot \left[ \frac{8}{3} \cdot \left( \frac{l}{d} \right)^3 + 1,54 \cdot \frac{l}{d} \right] \quad (3-19)$$

Členy v závorce vyjadřují příspěvky ohybového momentu  $M_o$  a posouvající síly  $T$  na deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice.

Z výsledného vztahu je patrné, že velikost deformačních příspěvků jednotlivých VVÚ je opět závislá na délce střednice nosníku  $l$  a průměru nosníku  $d$ . Budeme-li sledovat, jak se mění vliv jednotlivých VVÚ na deformační posunutí volného konce nosníku v závislosti na poměru  $l/d$ , dostaneme závislost (viz Obr. 3.15.) Příspěvek posouvající síly  $T$  je u tohoto typu nosníku zanedbatelný již při poměru  $l/d = 4$ .

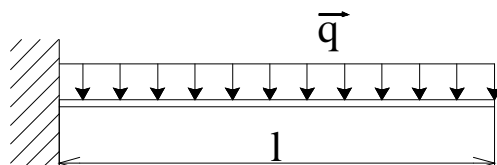
l/d	vliv příspěvků	
	M <sub>o</sub> (%)	T (%)
1	63,39	36,61
2	87,38	12,62
3	93,97	6,03
4	96,52	3,48
5	97,74	2,26
6	98,42	1,58
7	98,84	1,17
8	99,11	0,89
9	99,29	0,71
10	99,43	0,57



Obr. 3.15.

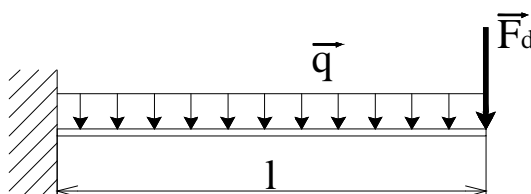
Kde  $w_{FMo}$  a  $w_{FT}$  značí příspěvky ohybového momentu  $M_o$  a posouvající síly  $T$  na deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice.

### 3.2.2. Vetknutý nosník zatížení po celé délce spojitě rozloženým zatížením ( Obr. 3.16. )



Obr. 3.16.

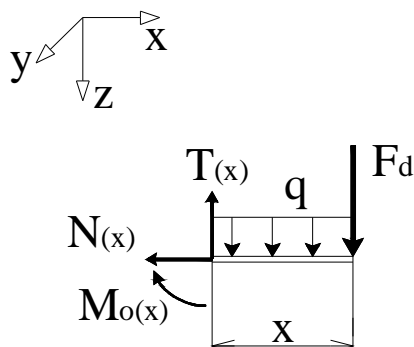
Abychom k řešení deformačního posunutí volného konce nosníku mohli použít Castigliánovu větu, musíme na volný konec nosníku umístit doplňkovou sílu  $\vec{F}_d$  (viz Obr. 3.17.).



Obr. 3.17.



VVÚ určíme jako funkce doplňkové síly  $\vec{F}_d$  ze statické rovnováhy prvku uvolněného od volného konce nosníku na (Obr. 3.18.).



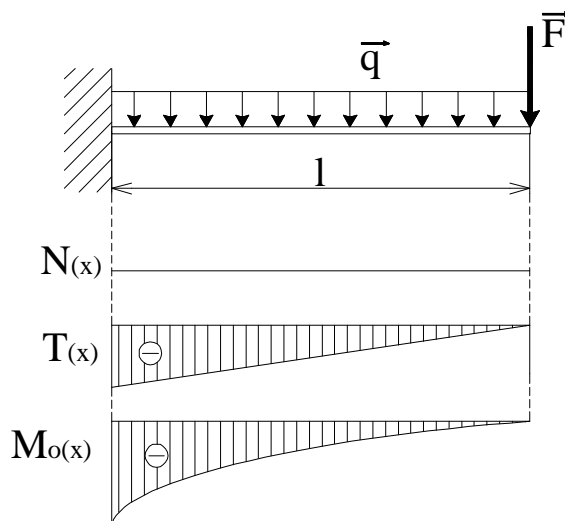
Obr. 3.18.

$$N(x) = 0 \quad (3-20)$$

$$T(x) = F_d + q \cdot x \quad (3-21)$$

$$M_o(x) = -F_d \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \quad (3-22)$$

Průběh VVÚ podél střednice je zobrazen na (Obr. 3.19.).



Obr. 3.19.

Jedná se o přímý prut, pro řešení deformace tedy použijeme vztah (2-29) do něhož dosadíme (3-20), (3-21) a (3-22)

$$\begin{aligned}
 w_F &= \frac{1}{E} \int_g \frac{M_o(x)}{J_y(x)} \cdot \frac{\partial M_o(x)}{\partial F} dx + \frac{b}{G} \int_g \frac{T(x)}{S(x)} \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial F} dx \\
 w_F &= \frac{1}{E} \int_0^l \frac{-q \cdot x^2}{2 \cdot J_y} \cdot (-x) dx + 0 + \frac{b}{G} \int_0^l \frac{q \cdot x}{S} \cdot 1 dx = \\
 &= \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \int_0^l \frac{q}{2} \cdot x^3 dx + \frac{b}{G \cdot S} \cdot \int_0^l q \cdot x dx = \frac{q \cdot l^4}{2 \cdot 4 \cdot E \cdot J_y} + \frac{b \cdot q \cdot l^2}{2 G \cdot S}
 \end{aligned} \quad (3-23)$$

Získali jsme obecný vztah (3–23) pro výpočet deformačního volného konce nosníku. Konkretizujeme ho nyní pro náš případ dosazením :

- $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + m)}$
- nosník má kruhový průřez  $J_y = \frac{p \cdot d^4}{64}$ ,  $S = \frac{p \cdot d^2}{4}$ ,  $\beta = 32/27$
- materiál nosníku je ocel  $\mu = 0,3$

$$w_F = \frac{64 \cdot q \cdot l^4}{2 \cdot 4 \cdot E \cdot p \cdot d^4} + \frac{4 \cdot 2 \cdot (1 + m) \cdot b \cdot q \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot p \cdot d^2} = \frac{8 \cdot q}{E \cdot p} \left[ \left( \frac{l}{d} \right)^4 + \frac{b}{2} \cdot (1 + m) \cdot \left( \frac{l}{d} \right)^2 \right]$$

Celkové deformační posunutí volného konce nosníku je tedy dáno vztahem

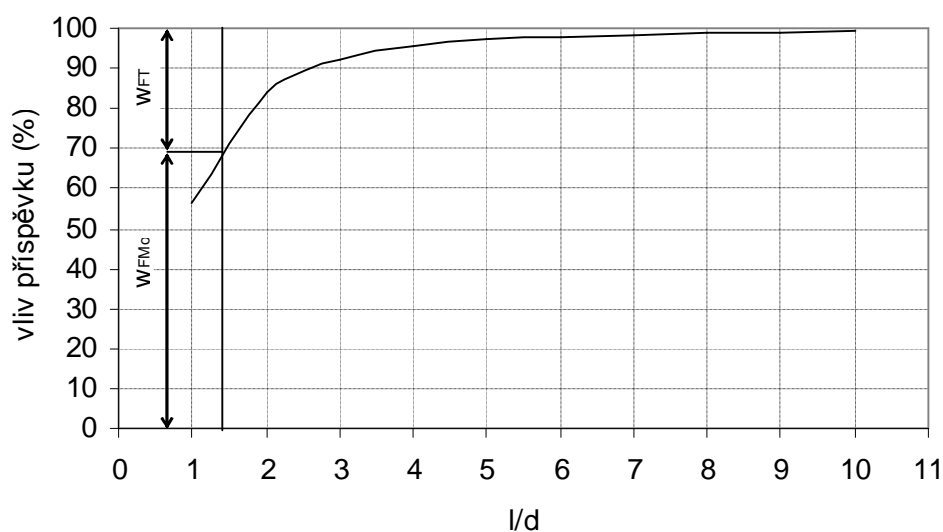
$$w_F = \frac{8 \cdot q}{E \cdot p} \left[ \left( \frac{l}{d} \right)^4 + 0,77 \cdot \left( \frac{l}{d} \right)^2 \right] \quad (3-24)$$

Členy v závorce vyjadřují příspěvky ohybového momentu  $M_o$  a posouvající síly  $T$  na deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice.

Z konečného vztahu plyne (3–24), že velikost příspěvků od obou VVÚ opět závisí na poměru délky střednice  $l$  a průměru nosníku  $d$ . S rostoucím poměrem  $l/d$  vliv příspěvku posouvající síly  $T$  na deformační posunutí volného konce nosníku klesá (viz Obr. 3.20.), při poměru  $l/d = 4$  jej můžeme úplně zanedbat.

l/d	vliv příspěvků	
	M <sub>o</sub> (%)	T (%)
1	56,5	43,5
2	83,86	16,14
3	92,12	7,88
4	95,41	4,59
5	97,01	2,99
6	97,91	2,09
7	98,45	1,55
8	98,81	1,19
9	99,06	0,94
10	99,24	0,76

### Vliv příspěvků jednotlivých VVÚ na deformační posunutí volného konce nosníku

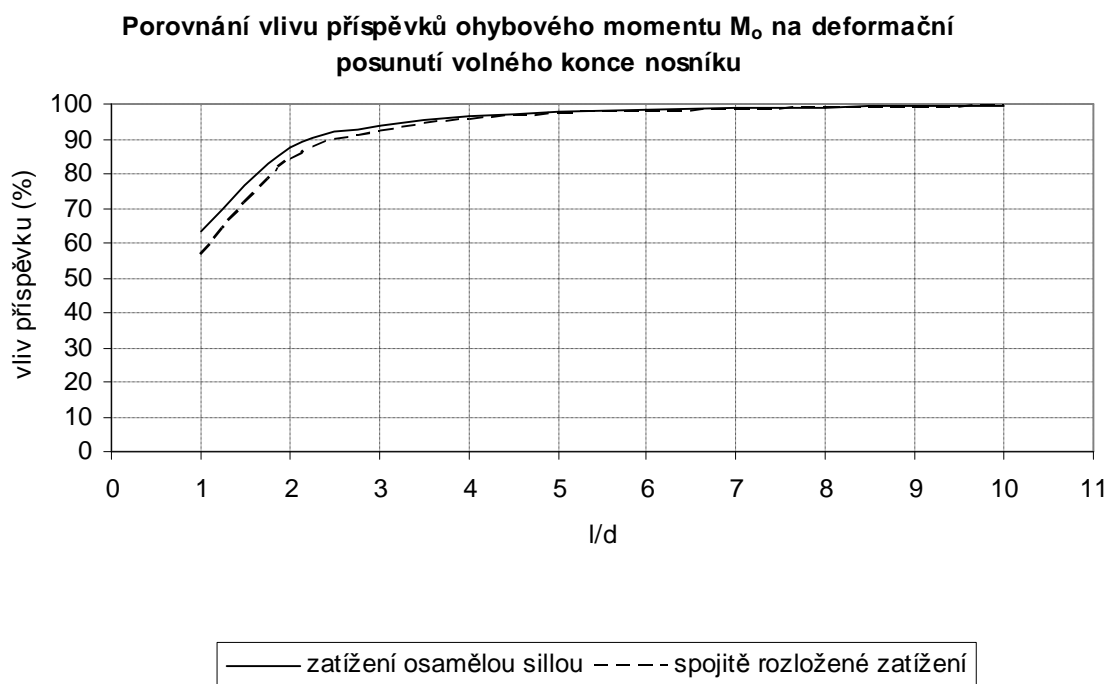


Obr. 3.20.

Kde  $w_{FMo}$  a  $w_{FT}$  značí příspěvky ohybového momentu  $M_o$  a posouvající síly  $T$  na deformační posunutí bodu ležícího v polovině délky střednice.

Porovnáme-li vlivy příspěvků ohybového momentu  $M_o$  na deformační posunutí volného konce nosníku při zatížení osamělou silou a při spojitě rozloženém zatížení (Obr. 3.21.), vidíme, že pro stejný poměr  $l/d$  při zatížení osamělou silou je příspěvek  $M_o$  vyšší, než při zatížení spojitě rozloženým zatížením (naopak oproti příkladům 3.1.1 a 3.1.2.). Vysvětlení, proč tomu tak je, by se provedlo obdobným způsobem jako u porovnání příkladů 3.1.1 a 3.1.2.

l/d	vliv příspěvků $M_o$ (%) na deformační posunutí volného konce nosníku	
	zatížení osamělou silou	spojitě rozložené zatížení
1	63,39	56,5
2	87,38	83,86
3	93,97	92,12
4	96,52	95,41
5	97,74	97,01
6	98,42	97,91
7	98,84	98,45
8	99,11	98,81
9	99,29	99,06
10	99,43	99,24



Obr. 3.21.

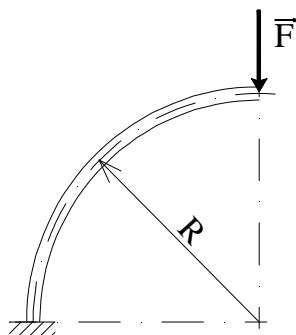
### 3.3. Vetknutý zakřivený prut

Zadání :

Je dán zakřivený vetknutý nosník obdélníkového průřezu, jehož střednice má tvar čtvrtkružnice, zatížený na volném konci osamělou silou  $F$  (viz Obr. 3.22.). Úkolem je vyřešit vliv příspěvků jednotlivých VVÚ na posunutí volného konce nosníku v závislosti na poměru poloměru zakřivení střednice  $R$  a charakteristického rozměru průřezu s využitím teorie

1. silně zakřivených prutů
2. slabě zakřivených prutů

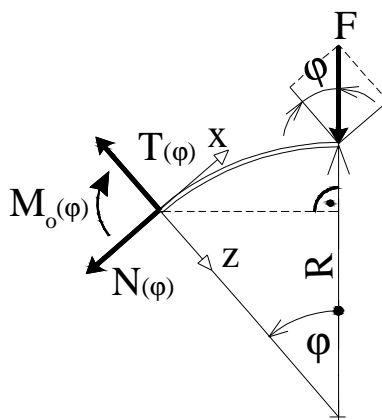
výsledky porovnat a posoudit kdy je tento nosník vhodné řešit jako silně zakřivený a kdy jako slabě zakřivený prut .



Obr. 3.22.

### 3.3.1. Řešení s využitím teorie silně zakřivených prutů

Výsledné vnitřní účinky určíme z podmínek statické rovnováhy prvku uvolněného od volného konce nosníku (Obr. 3.23.).



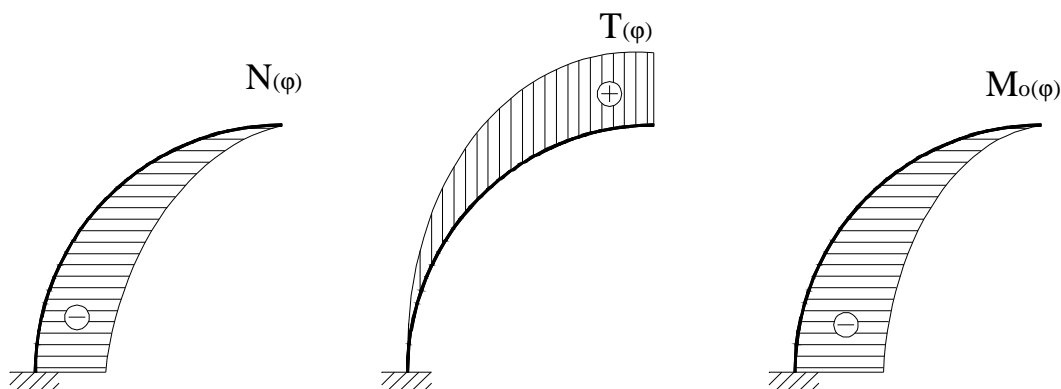
Obr. 3.23.

$$N(j) = -F \cdot \sin j \quad (3-25)$$

$$T(j) = F \cdot \cos j \quad (3-26)$$

$$M_o(j) = -F \cdot R \cdot \sin j \quad (3-27)$$

Průběhy výsledných vnitřních účinků po délce střednice je zobrazen na (Obr. 3.24.)



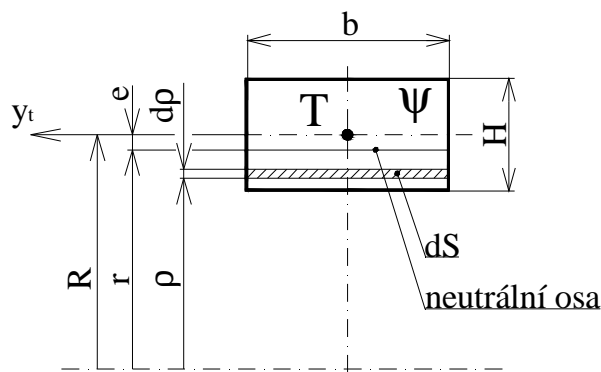
Obr. 3.24.

Deformační posunutí konce nosníku vypočteme podle vztahu (2-26)

$$w_F = \int_g \frac{M_o(j)}{E \cdot e \cdot S(j) \cdot R} \cdot \frac{\partial M_o(j)}{\partial F} ds - \int_g \left[ \frac{M_o(j)}{E \cdot S(j) \cdot R} \cdot \frac{\partial N(j)}{\partial F} + \frac{N(j)}{E \cdot S(j) \cdot R} \cdot \frac{\partial M_o(j)}{\partial F} \right] ds +$$

$$+ \int_g \frac{N(j)}{E \cdot S(j)} \cdot \frac{\partial N(j)}{\partial F} ds + \int_g \frac{b \cdot T(j)}{G \cdot S(j)} \cdot \frac{\partial T(j)}{\partial F} ds$$

- střednice je tvořena čtvrtkružnicí, délka elementu střednice je  $ds = R \cdot dj$
- v prvním členu vzorce (2–30) se vykytuje excentricita  $e$ , což je vzdálenost neutrální osy průřezu od osy těžiště průřezu  $\psi$  (viz Obr. 3.25.).



Obr. 3.25.

Excentricita  $e$  se vypočítá dosazením vztahu (2–12) do vztahu (2–11), nosník má obdélníkový průřez  $S = b \cdot H$ ,  $dS = b \cdot dr$

$$r = \frac{S}{\int_y \frac{dS}{r}} = \frac{b \cdot H}{b \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot R + H}{2 \cdot R - H}\right)} = \frac{H}{\ln\left(\frac{2 \cdot R + H}{2 \cdot R - H}\right)} \quad (3-28)$$

$$\int_y \frac{dS}{r} = \int_{R-\frac{H}{2}}^{R+\frac{H}{2}} \frac{b \cdot dr}{r} = b \cdot \int_{R-\frac{H}{2}}^{R+\frac{H}{2}} \frac{dr}{r} = b \cdot [\ln r]_{R-\frac{H}{2}}^{R+\frac{H}{2}} = b \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot R + H}{2 \cdot R - H}\right)$$

$$e = R - r = R - \frac{H}{\ln\left(\frac{2 \cdot R + H}{2 \cdot R - H}\right)} \quad (3-29)$$

Dosadíme-li nyní do vztahu (2–30) vztahy (3–25), (3–26) a (3–27)

$$w_F = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{-F \cdot R \cdot \sin j}{E \cdot e \cdot b \cdot H \cdot R} \cdot (-R \cdot \sin j) R dj - \int_0^{\frac{p}{2}} \left[ \frac{-F \cdot R \cdot \sin j}{E \cdot b \cdot H \cdot R} \cdot (-\sin j) + \frac{-F \cdot \sin j}{E \cdot b \cdot H \cdot R} \cdot (-R \cdot \sin j) \right] R dj +$$

$$+ \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{-F \cdot \sin j}{E \cdot b \cdot H} \cdot (-\sin j) \cdot R dj + \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{b \cdot F \cdot \cos j}{G \cdot b \cdot H} \cdot \cos j \cdot R dj =$$

- po úpravě

$$w_F = \frac{F \cdot R^2}{E \cdot e \cdot b \cdot H} \cdot \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 j \, dj - 2 \cdot \frac{F \cdot R}{E \cdot b \cdot H} \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 j \, dj + \frac{F \cdot R}{E \cdot b \cdot H} \cdot \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 j \, dj + \frac{b \cdot F \cdot R}{G \cdot b \cdot H} \cdot \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 j \, dj$$

Po integraci s použitím Maple

$$w_F = \frac{1}{4} \cdot \frac{F \cdot R^2 \cdot p}{E \cdot e \cdot b \cdot H} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{F \cdot R \cdot p}{E \cdot b \cdot H} + \frac{1}{4} \cdot \frac{F \cdot R \cdot p}{E \cdot b \cdot H} + \frac{1}{4} \cdot \frac{b \cdot F \cdot R \cdot p}{G \cdot b \cdot H}$$

Dosadíme-li :

- $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + m)}$
- nosník má obdélníkový průřez  $\beta = 1,2$
- materiál nosníku je ocel  $\mu = 0,3$

$$w_F = \frac{F \cdot p}{4 \cdot E \cdot b} \cdot \left( \frac{R}{e} \cdot \frac{R}{H} - 2 \cdot \frac{R}{H} + \frac{R}{H} + 3,12 \frac{R}{H} \right) \quad (3-30)$$

Členy v závorce vyjadřují příspěvky ohybového momentu  $M_o$ , členu  $M_o N$ , normálové síly  $N$  a posouvající síly  $T$  na deformační posunutí volného konce nosníku.

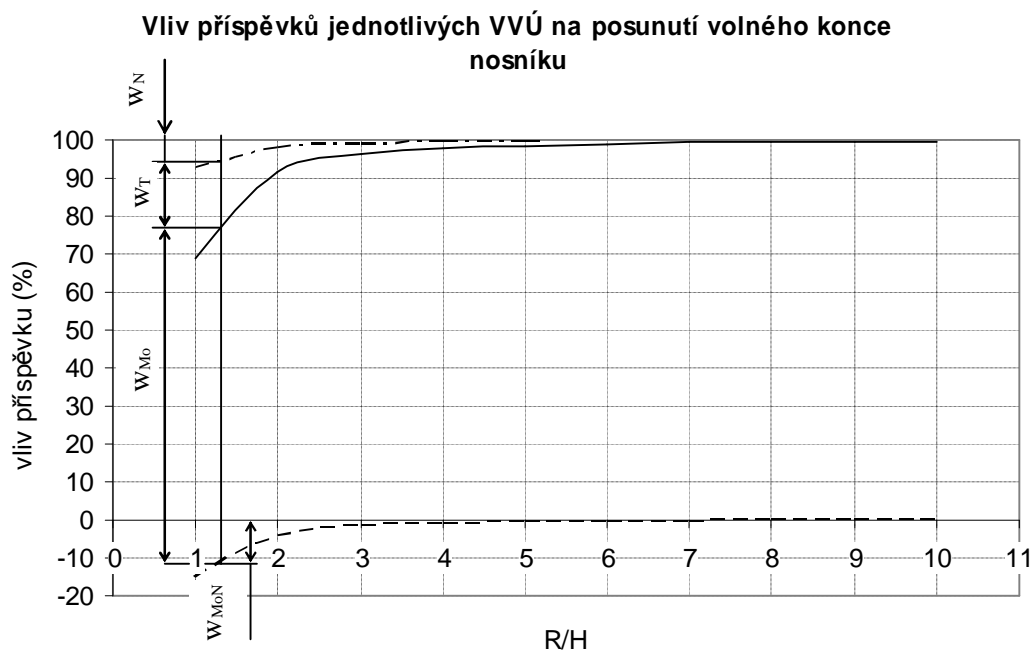
Vliv příspěvků jednotlivých VVÚ na deformační posunutí volného konce nosníku je závislý na poměru poloměru zakřivení střednice  $R$  a výšky průřezu  $H$ .

V případě, kdy prut řešíme jako silně zakřivený, nastává problém, jakým způsobem zahrnout do porovnání vlivů deformačních příspěvků od jednotlivých VVÚ příspěvek členu  $M_o N$ , který působí proti smyslu deformace. Můžeme porovnat :

1. absolutní hodnoty velikostí příspěvků od jednotlivých VVÚ na deformační posunutí volného konce nosníku, které nám dá představu o tom, jaký mají jednotlivé VVÚ vliv na celkovou deformaci
2. nebo můžeme uvažovat u členu  $M_o N$  znaménko minus, tím získáme představu o tom, kolik procent z celkového deformačního posunutí vyšetřovaného bodu představuje deformační posunutí způsobené konkrétním VVÚ ve směru, v němž tento VVÚ působí.

Použijeme metodiku 2. Z porovnání vlivů příspěvků jednotlivých VVÚ na deformační posunutí volného konce nosníku v závislosti na poměru  $R/H$  (Obr. 3.26.) je patrné, že s narůstajícím poměrem  $R/H$  narůstá i velikost vlivu deformačního příspěvku vyvolaného ohybovým momentem, v porovnání s vlivy deformačních příspěvků vyvolaných ostatními VVÚ.

R/H	vliv příspěvků			
	$M_o$ (%)	$M_o N$ (%)	$N$ (%)	$T$ (%)
1	84,01	-15,08	7,54	23,53
2	95,7	-4,06	2,03	6,33
3	98,06	-1,83	0,91	2,85
4	98,9	-1,03	0,52	1,61
5	99,3	-0,66	0,33	1,04
6	99,51	-0,46	0,23	0,72
7	99,64	-0,34	0,17	0,53
8	99,72	-0,26	0,13	0,41
9	99,78	-0,21	0,1	0,32
10	99,82	-0,17	0,08	0,26



Obr. 3.26.

Kde  $w_{Mo}$ ,  $w_T$ ,  $w_N$ ,  $w_{MoN}$  značí příspěvky ohybového momentu  $M_o$ , posouvající síly  $T$ , normálové síly  $N$  a členu  $M_o N$  na deformační posunutí volného konce nosníku.

### 3.3.2. Řešení s využitím teorie slabě zakřivených prutů

Průběhy VVÚ po délce střednice jsou stejné jako v předchozí kapitole 3.3.1. Deformační posunutí volného konce nosníku se vypočítá ze vztahu (2–31) do něhož dosadíme vztahy (3–25), (3–26) a (3–27)

$$w_F = \frac{1}{E} \int_g \frac{M_o(j)}{J_y(j)} \cdot \frac{\partial M_o(j)}{\partial F} ds + \frac{1}{E} \int_g \frac{N(j)}{S(j)} \cdot \frac{\partial N(j)}{\partial F} ds + b \int_g \frac{T(j)}{G \cdot S(j)} \cdot \frac{\partial T(j)}{\partial F} ds$$

střednice je tvořena čtvrtkružnicí, délka elementu střednice je  $ds = R \cdot dj$

$$w_F = \frac{1}{E} \cdot \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{-F \cdot R \cdot \sin j}{J_y} \cdot (-R \cdot \sin j) \cdot R dj + \frac{1}{E} \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{-F \cdot \sin j}{S} \cdot (-\sin j) \cdot R dj +$$

$$+ b \cdot \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{F \cdot \cos j}{G \cdot S} \cdot \cos j \cdot R dj$$

po úpravě

$$w_F = \frac{F \cdot R^3}{E \cdot J_y} \cdot \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 j \, dj + \frac{F \cdot R^2}{E \cdot S} \cdot \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 j \, dj + \frac{b \cdot F \cdot R}{G \cdot S} \cdot \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 j \, dj$$



po integraci s použitím Maple

$$w_F = \frac{1}{4} \cdot \frac{F \cdot R^3 \cdot p}{E \cdot J_y} + \frac{1}{4} \cdot \frac{F \cdot R \cdot p}{E \cdot S} + \frac{1}{4} \cdot \frac{b \cdot F \cdot R \cdot p}{G \cdot S}$$

dosadíme-li a upravíme

$$- G = \frac{E}{2 \cdot (1 + m)}$$

$$- \text{nosník má obdélníkový průřez } J_y = \frac{b \cdot H^3}{12}, S = b \cdot H, \beta = 1,2$$

$$- \text{materiál nosníku je ocel } \mu = 0,3$$

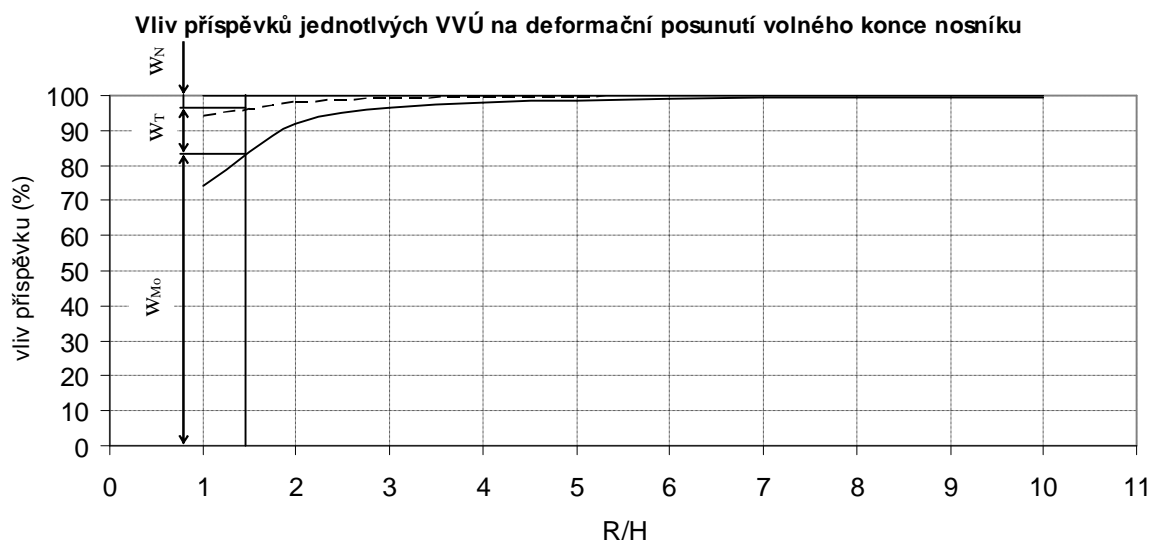
Celkové deformační posunutí volného konce nosníku je tedy popsáno vztahem

$$w_F = \frac{F \cdot p}{4 \cdot E \cdot b} \cdot \left[ 12 \cdot \left( \frac{R}{H} \right)^3 + \frac{R}{H} + 3,12 \cdot \frac{R}{H} \right] \quad (3-31)$$

Členy v závorce vyjadřují příspěvky ohybového momentu  $M_o$ , normálové síly  $N$  a posouvající síly  $T$ , na deformační posunutí volného konce nosníku.

Vliv příspěvků jednotlivých VVÚ na deformační posunutí volného konce nosníku je opět závislý na poměru poloměru zakřivení střednice  $R$  a výšky průřezu  $H$  (viz Obr. 3.27.).

R/H	vliv příspěvku		
	$M_o$ (%)	$N$ (%)	$T$ (%)
1	74,44	6,2	19,35
2	92,1	1,92	5,99
3	96,33	0,89	2,78
4	97,9	0,51	1,59
5	98,65	0,33	1,03
6	99,06	0,23	0,72
7	99,3	0,17	0,53
8	99,47	0,13	0,4
9	99,58	0,1	0,32
10	99,66	0,08	0,26



Obr. 3.27.

Kde  $w_{Mo}$ ,  $w_T$ ,  $w_N$  značí příspěvky ohybového momentu  $M_o$ , posouvající síly  $T$  a normálové síly  $N$  na deformační posunutí volného konce nosníku.

Porovnáme-li nyní řešení získaná využitím teorií silně a slabě zakřiveného prutu společně, uvidíme, že vliv deformačních příspěvků vyvolaných jednotlivými VVÚ se liší při malých poměrech  $R/H$  řádově o několik procent a s rostoucím poměrem  $R/H$  se tento rozdíl zmenšuje. Modelování úlohy s využitím teorie silně zakřivených prutů je přesnější, ale operačně složitější [2].

Chceme-li zjistit jaké odchylky se dopustíme, když budeme prut řešit jako slabě zakřivený, musíme provést porovnání velikostí napětí, které VVÚ vyvolají. Napětí od normálové a posouvající síly se v obou případech vypočítají podle stejných vztahů, stačí když porovnáme velikosti napětí vyvolaných ohybovými momenty.

Budeme tedy posuzovat velikost odchylky, které se dopustíme, když vztah pro výpočet napětí vyvolaného ohybovým momentem v silně zakřiveném prutu (2–10) nahradíme vztahem pro výpočet napětí vyvolaného ohybovým momentem ve slabě zakřiveném prutu (2–8).

$$\Delta s = \frac{S_{\text{silně z.}} - S_{\text{slabě z.}}}{S_{\text{silně z.}}} \cdot 100$$

R/H	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
odchylka $\Delta s$ [%]	55,8	25,9	17	12,7	10,1	8,4	7,2	6,3	5,6	5	4,6	4,2	3,9	3,6	3,3

Z porovnání je vidět, že při malých hodnotách poměru  $R/H$  se v případě použití teorie slabě zakřivených prutů dopustíme značné chyby, použijeme-li však tuto teorii pro poměr  $R/H = 10$  dopustíme se chyby pouze 5% což už je přípustné. Je ale důležité si uvědomit, že toto platí pouze pro obdélníkový případně čtvercový průřez, velikost odchylky totiž závisí na poloze neutrální osy  $r$ .

Podobným způsobem porovnejme pro jednotlivé poměry  $R/H$ , deformační posuvy  $w_F$  volného konce nosníku vyvolané zatěžující silou  $F$  při výpočtu podle teorie silně zakřivených prutů (3–30) a při výpočtu podle teorie slabě zakřivených prutů (3–31). Deformační posunutí bodu je obecně definována jako  $w_F = F \cdot k$ , kde  $F$  představuje zatížení a  $k$  je konstanta závislá na geometrii a materiálu nosníku, lze ji označit jako poddajnost nosníku. Zatěžující síla  $F$  je v obou případech stejná. Zvolme tedy  $H = 0,1m$ ,  $R \in \langle 0,1m ; 1m \rangle$  a porovnejme poddajnost nosníku v případě výpočtu podle teorie silně zakřiveného prutu a teorie slabě zakřivených prutů.

R/H	$k_{\text{silně z.}}$	$k_{\text{slabě z.}}$
1	13,26	16,12
2	98,61	104,24
3	327,94	336,36
4	773,27	784,48
5	1506,69	1520,60
6	2599,91	2616,72
7	4125,23	4144,84
8	6154,55	6176,96
9	8759,87	8785,08
10	12013,19	12041,20

$$|\Delta k| = \frac{k_{\text{silně z.}} - k_{\text{slabě z.}}}{k_{\text{silně z.}}} \cdot 100$$

R/H	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta k$ (%)	21,56	5,71	2,57	1,45	0,93	0,65	0,48	0,36	0,29	0,23

Poddajnost silně zakřiveného prutu je nižší než poddajnost slabě zakřiveného prutu. Deformační posunutí volného konce nosníku vypočítané s využitím teorie silně zakřivených prutů tedy bude menší než deformační posunutí vypočítané podle teorie slabě zakřivených prutů.

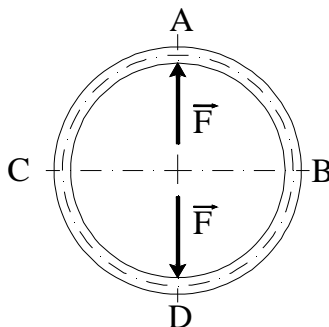
### 3.4. Uzavřený kroužek

Zadání :

Je dán uzavřený kroužek obdélníkového průřezu zatížený silami  $F$  dle (Obr. 3.28.). Úkolem je určit vliv příspěvků jednotlivých VVÚ na vzájemné posunutí bodů A a D kroužku v závislosti na poměru poloměru zakřivení střednice a charakteristického rozměru průřezu s využitím teorie :

1. silně zakřivených prutů
2. slabě zakřivených prutů

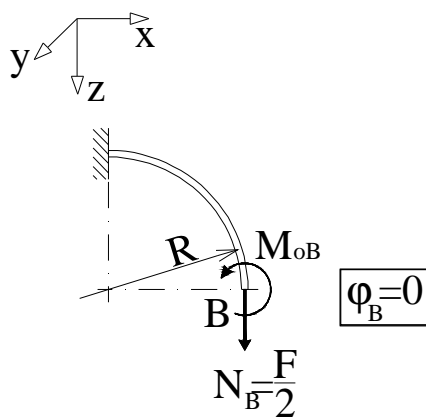
výsledky porovnat a posoudit kdy lze tento případ řešit jako silně zakřivený a kdy jako slabě zakřivený prut .



Obr. 3.28.

#### 3.4.1. Řešení s využitím teorie silně zakřivených prutů

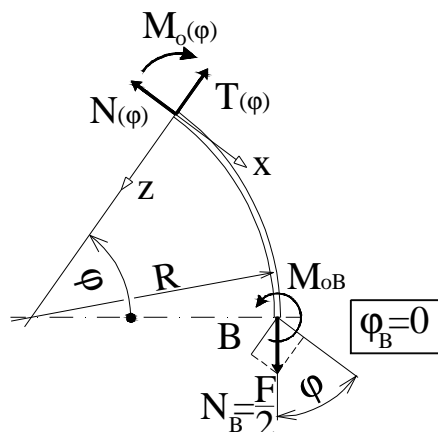
Úloha má dvě osy symetrie, využijeme-li postupu uvedeného v bodě 2.8. postačí když vyřešíme pouze čtvrtinu kroužku (viz Obr. 3.29.).



Obr. 3.29.

Vzhledem k symetrii úlohy je deformační posunutí bodu B rovno jedné polovině vzdálenosti o kterou se vzájemně posunou body A a D.

Průběh VVÚ podél střednice určíme z rovnováhy prvku uvolněného od volného konce nosníku (Obr. 3.30.).



Obr. 3.30.

$$N(j) = \frac{F}{2} \cdot \cos j \quad (3-32)$$

$$T(j) = \frac{F}{2} \cdot \sin j \quad (3-33)$$

$$M_o(j) = M_{oB} - \frac{F}{2} \cdot R \cdot (1 - \cos j) \quad (3-34)$$

Ohybový moment  $M_{oB}$  v průřezu B určíme z deformační podmínky zaručující hladkost střednice v místě řezu  $\phi_B = 0$ . Pro řešení použijeme vztah (2-30), který podle bodu 2.7. upravíme pro výpočet úhlu natočení

$$\begin{aligned} j_B &= \int_g \frac{M_o(j)}{E \cdot e \cdot S(j) \cdot R} \cdot \frac{\partial M_o(j)}{\partial M_{oB}} ds - \int_g \left[ \frac{M_o(j)}{E \cdot S(j) \cdot R} \cdot \frac{\partial N(j)}{\partial M_{oB}} + \frac{N(j)}{E \cdot S(j) \cdot R} \cdot \frac{\partial M_o(j)}{\partial M_{oB}} \right] ds + \\ &+ \int_g \frac{N(j)}{E \cdot S(j)} \cdot \frac{\partial N(j)}{\partial M_{oB}} ds + \int_g \frac{b \cdot T(j)}{G \cdot S(j)} \cdot \frac{\partial T(j)}{\partial M_{oB}} ds = 0 \\ 0 &= \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{M_{oB} - \frac{F}{2} \cdot R \cdot (1 - \cos j)}{E \cdot e \cdot S \cdot R} \cdot 1 \cdot R dj - \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{F \cdot \cos j}{2 \cdot E \cdot S \cdot R} \cdot 1 \cdot R dj \\ 0 &= \frac{1}{E \cdot e \cdot S} \int_0^{\frac{p}{2}} M_{oB} - \frac{F \cdot R}{2} + \frac{F \cdot R}{2} \cdot \cos j \, dj - \frac{F}{2 \cdot E \cdot S} \cdot \int_0^{\frac{p}{2}} \cos j \, dj \\ 0 &= \frac{1}{E \cdot e \cdot S} \cdot \left( M_{oB} \cdot \frac{p}{2} - \frac{F \cdot R}{2} \cdot \frac{p}{2} + \frac{F \cdot R}{2} \right) - \frac{F}{2 \cdot E \cdot S} \end{aligned}$$

po úpravě

$$M_{oB} = F \cdot R \cdot \left( \frac{e}{p \cdot R} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \right) \quad (3-35)$$

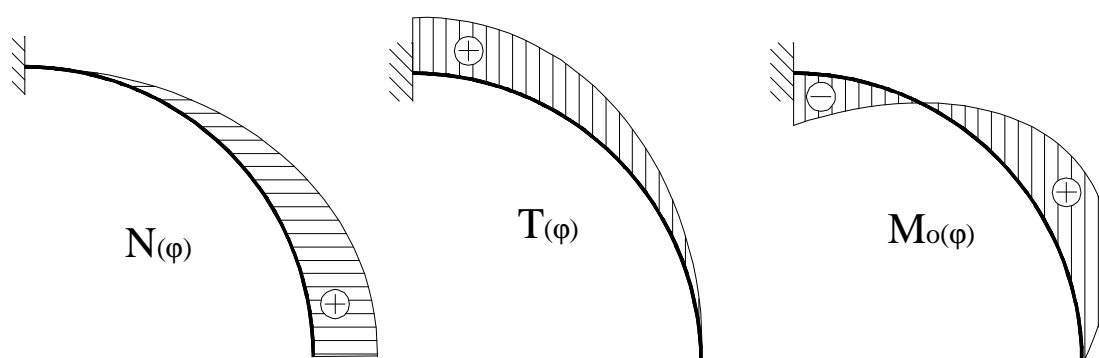
dosadíme-li moment  $M_{oB}$  (3-35) do vztahu (3-34)

$$M_o(j) = F \cdot R \cdot \left( \frac{e}{p \cdot R} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \right) - \frac{F}{2} \cdot R \cdot (1 - \cos j)$$

po úpravě

$$M_o(j) = \frac{F \cdot R}{2} \cdot \left( \frac{2 \cdot e}{p \cdot R} - \frac{2}{p} + \cos j \right) \quad (3-36)$$

průběh VVÚ po délce střednice je zobrazen na (Obr. 3.31.)



Obr. 3.31.

Vzájemné pousnutí bodů A a D určíme ze vztahu (2-30) do kterého dosadíme ze vztahů (3-32), (3-33) a (3-36)

$$\begin{aligned} d_{AD} = 2 \cdot w_{F_B} = & 2 \int_g \frac{M_o(j)}{E \cdot e \cdot S(j) \cdot R} \cdot \frac{\partial M_o(j)}{\partial \left( \frac{F}{2} \right)} ds - 2 \int_g \left[ \frac{M_o(j)}{E \cdot S(j) \cdot R} \cdot \frac{\partial N(j)}{\partial \left( \frac{F}{2} \right)} + \frac{N(j)}{E \cdot S(j) \cdot R} \cdot \frac{\partial M_o(j)}{\partial \left( \frac{F}{2} \right)} \right] ds + \\ & + 2 \int_g \frac{N(j)}{E \cdot S(j)} \cdot \frac{\partial N(j)}{\partial \left( \frac{F}{2} \right)} ds + 2 \int_g \frac{b \cdot T(j)}{G \cdot S(j)} \cdot \frac{\partial T(j)}{\partial \left( \frac{F}{2} \right)} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{AD} = & 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{F \cdot R \cdot \left( \frac{2 \cdot e}{p \cdot R} - \frac{2}{p} + \cos j \right)}{2 \cdot E \cdot e \cdot S \cdot R} \cdot R \cdot \left( \frac{2 \cdot e}{p \cdot R} - \frac{2}{p} + \cos j \right) \cdot R dj - \\
& - 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \left[ \frac{F \cdot R \cdot \left( \frac{2 \cdot e}{p \cdot R} - \frac{2}{p} + \cos j \right)}{2 \cdot E \cdot S \cdot R} \cdot \cos j + \frac{F \cdot \cos j}{2 \cdot E \cdot S \cdot R} \cdot R \cdot \left( \frac{2 \cdot e}{p \cdot R} - \frac{2}{p} + \cos j \right) \right] \cdot R dj + \\
& + 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{F \cdot \cos j}{2 \cdot E \cdot S} \cdot \cos j \cdot R dj + 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{b \cdot F \cdot \sin j}{2 \cdot G \cdot S} \cdot \sin j \cdot R dj =
\end{aligned}$$

po úpravě

$$\begin{aligned}
d_{AD} = & \frac{2 \cdot F \cdot R^2}{2 \cdot E \cdot e \cdot S} \int_0^{\frac{p}{2}} \left( \frac{2 \cdot e}{p \cdot R} - \frac{2}{p} + \cos j \right)^2 dj - 2 \cdot \frac{2 \cdot F \cdot R}{2 \cdot E \cdot S} \int_0^{\frac{p}{2}} \left( \frac{2 \cdot e}{p \cdot R} - \frac{2}{p} + \cos j \right) \cdot \cos j dj + \\
& + \frac{2 \cdot F \cdot R}{2 \cdot E \cdot S} \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 j dj + \frac{2 \cdot b \cdot F \cdot R}{2 \cdot G \cdot S} \cdot \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 j dj
\end{aligned}$$

po integraci s použitím Maple

$$\begin{aligned}
d = & 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{F \cdot (8e^2 - 8R^2 + p^2 \cdot R^2)}{p \cdot E \cdot S \cdot e} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{F \cdot (8 \cdot e - 8 \cdot R + p^2 \cdot R)}{p \cdot E \cdot S} + \\
& + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{F \cdot p \cdot R}{E \cdot S} + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{b \cdot p \cdot F \cdot R}{G \cdot S}
\end{aligned}$$

- dosazením :
- $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + m)}$
- nosník má obdélníkový průřez  $S = b \cdot H$ ,  $\beta = 1,2$
- materiál nosníku je ocel  $\mu = 0,3$

$$d_{AD} = \frac{F}{4 \cdot E \cdot b} \left( \frac{8e^2 - 8R^2 + p^2 \cdot R^2}{p \cdot e \cdot H} - 2 \cdot \frac{8 \cdot e - 8 \cdot R + p^2 \cdot R}{p \cdot H} + \frac{p \cdot R}{H} + 2 \cdot (1 + m) \cdot b \cdot \frac{p \cdot R}{H} \right)$$

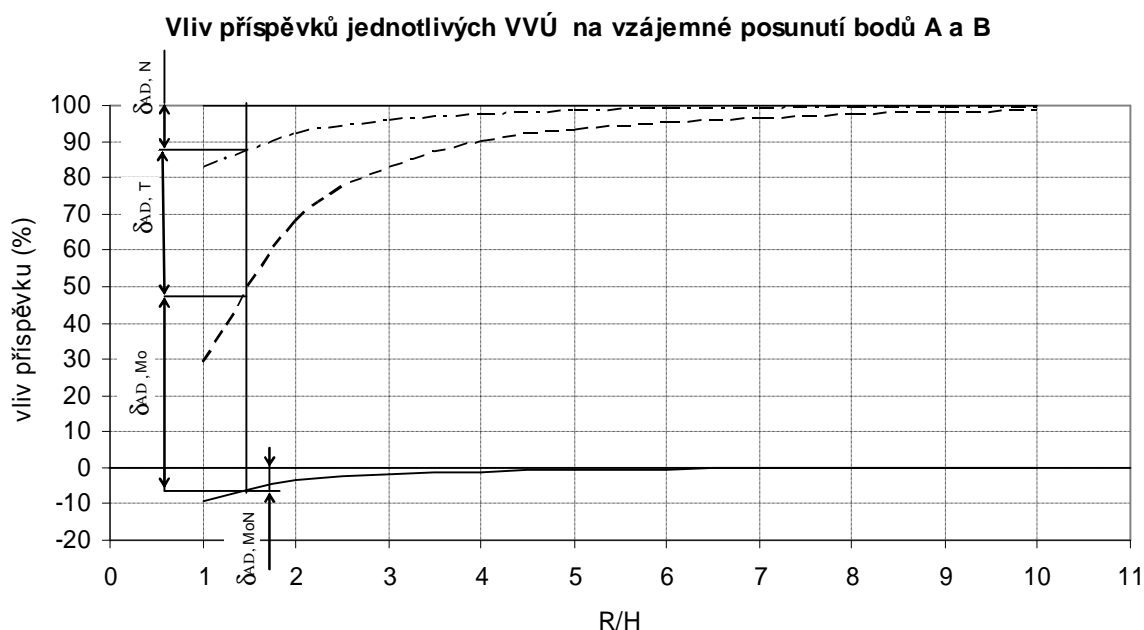
vzájemné posunutí bodů A a D je tedy dáno vztahem

$$d_{AD} = \frac{F}{4 \cdot E \cdot b} \left( \frac{8e^2 - 8R^2 + p^2 \cdot R^2}{p \cdot e \cdot H} - 2 \cdot \frac{8 \cdot e - 8 \cdot R + p^2 \cdot R}{p \cdot H} + \frac{p \cdot R}{H} + 3,12 \cdot \frac{p \cdot R}{H} \right) \quad (3-37)$$

Členy v závorce vyjadřují příspěvky ohybového momentu  $M_o$ , členu  $M_o N$ , normálové síly  $N$  a posouvající síly  $T$  na vzájemné posunutí bodů A a D.

Z porovnání vlivů příspěvků jednotlivých VVÚ na vzájemné posunutí bodů A a D je zřejmé, že při  $R/H = 1$  má největší vliv na deformaci příspěvek posouvající síly  $T$ , při poměru  $R/H = 2$  už má největší vliv příspěvek vyvolaný ohybovým momentem  $M_o$ , který nadále roste v porovnání s vlivy příspěvků ostatních VVÚ (viz graf na Obr. 3.32.).

R/H	vliv příspěvku			
	$M_o(\%)$	$M_o N(\%)$	$N(\%)$	$T(\%)$
1	37,78	-9,07	17,3	53,99
2	70,73	-3,26	7,9	24,64
3	84,5	-1,64	4,16	12,98
4	90,66	-0,97	2,5	7,81
5	93,82	-0,64	1,66	5,16
6	95,62	-0,45	1,17	3,65
7	96,75	-0,33	0,87	2,71
8	97,49	-0,26	0,67	2,09
9	98,01	-0,2	0,53	1,66
10	98,38	-0,16	0,43	1,35



Obr. 3.32.

Kde  $d_{AD, Mo}$ ,  $d_{AD, T}$ ,  $d_{AD, N}$ ,  $d_{AD, MoN}$  představují příspěvky ohybového momentu  $M_o$ , posouvající síly  $T$ , normálová síly  $N$  a členu  $M_o N$  na vzájemné posunutí bodů A a D.

### 3.4.2. Řešení s využitím teorie slabě zakřivených prutů

Průběhy VVÚ po délce střednice jsou stejné jako v předchozí kapitole 3.4.1. Moment  $M_{oB}$  určíme z deformační podmínky zaručující hladkost střednice místě řezu B  $\varphi_B = 0$ , použijeme vztah (2–31), který podle bodu 2.7. upravíme pro výpočet úhlu natočení.

$$j_B = \frac{1}{E} \cdot \int_g \frac{M_o(j)}{J_y(j)} \cdot \frac{\partial M_o(j)}{\partial M_{oB}} ds + \frac{1}{E} \int_g \frac{N(j)}{S(j)} \cdot \frac{\partial N(j)}{\partial M_{oB}} ds + b \cdot \int_g \frac{T(j)}{G \cdot S(j)} \cdot \frac{\partial T(j)}{\partial M_{oB}} ds = 0$$



$$0 = \frac{R}{E \cdot J_y} \cdot \int_0^{\frac{p}{2}} M_{oB} - \frac{F}{2} \cdot R \cdot (1 - \cos j) dj$$

po úpravě

$$M_{oB} = F \cdot R \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \quad (3-38)$$

dosadíme-li vztah (3-38) do vztahu (3-34)

$$M_o(j) = F \cdot R \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) - \frac{F}{2} \cdot R \cdot (1 - \cos j)$$

po úpravě

$$M_o(j) = \frac{F \cdot R}{2} \cdot \left( \cos j - \frac{2}{p} \right) \quad (3-39)$$

Vzájemné posunutí bodů A a D určíme ze vztahu (2-31), do kterého dosadíme ze vztahů (3-32), (3-33) a (3-39)

$$\begin{aligned} d_{AD} &= 2 \cdot w_B = 2 \cdot \frac{1}{E} \cdot \int_g \frac{M_o(j)}{J_y(j)} \cdot \frac{\partial M_o(j)}{\partial \left( \frac{F}{2} \right)} ds + 2 \cdot \frac{1}{E} \int_g \frac{N(j)}{S(j)} \cdot \frac{\partial N(j)}{\partial \left( \frac{F}{2} \right)} ds + 2 \cdot b \cdot \int_g \frac{T(j)}{G \cdot S(j)} \cdot \frac{\partial T(j)}{\partial \left( \frac{F}{2} \right)} ds \\ d_{AD} &= 2 \cdot \frac{1}{E} \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{F \cdot R \cdot \left( \cos j - \frac{p}{2} \right)}{2 \cdot J_y} \cdot R \cdot \left( \cos j - \frac{p}{2} \right) \cdot R dj + 2 \cdot \frac{1}{E} \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{F \cdot \cos j}{2 \cdot S} \cdot \cos j \cdot R dj + \\ &+ 2 \cdot b \cdot \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{F \cdot \sin j}{2 \cdot G \cdot S} \cdot \sin j \cdot R dj \end{aligned}$$

po úpravě

$$d_{AD} = 2 \cdot \frac{F \cdot R^3}{2 \cdot J_y \cdot E} \int_0^{\frac{p}{2}} \left( \cos j - \frac{p}{2} \right)^2 dj + 2 \cdot \frac{F \cdot R}{2 \cdot E \cdot S} \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 j dj + 2 \cdot \frac{b \cdot F \cdot R}{2 \cdot G \cdot S} \cdot \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 j dj$$

po integraci s použitím Maple

$$d_{AD} = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{F \cdot R^3 \cdot (p^2 - 8)}{p \cdot E \cdot J_y} + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{p \cdot F \cdot R}{E \cdot S} + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{b \cdot p \cdot F \cdot R}{G \cdot S}$$

- dosazením  $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + m)}$
- nosník má obdélníkový průřez  $J_y = \frac{b \cdot H^3}{12}$ ,  $S = b \cdot H$ ,  $\beta = 1,2$
- materiál nosníku je ocel  $\mu = 0,3$

$$d_{AD} = \frac{F \cdot p}{4 \cdot E \cdot b} \cdot \left[ 12 \cdot \left( 1 - \frac{8}{p^2} \right) \cdot \left( \frac{R}{H} \right)^3 + \frac{R}{H} + 2 \cdot (1 + m) \cdot b \cdot \frac{R}{H} \right]$$

Vzájemné posunutí bodů A a B je tedy dáno vztahem

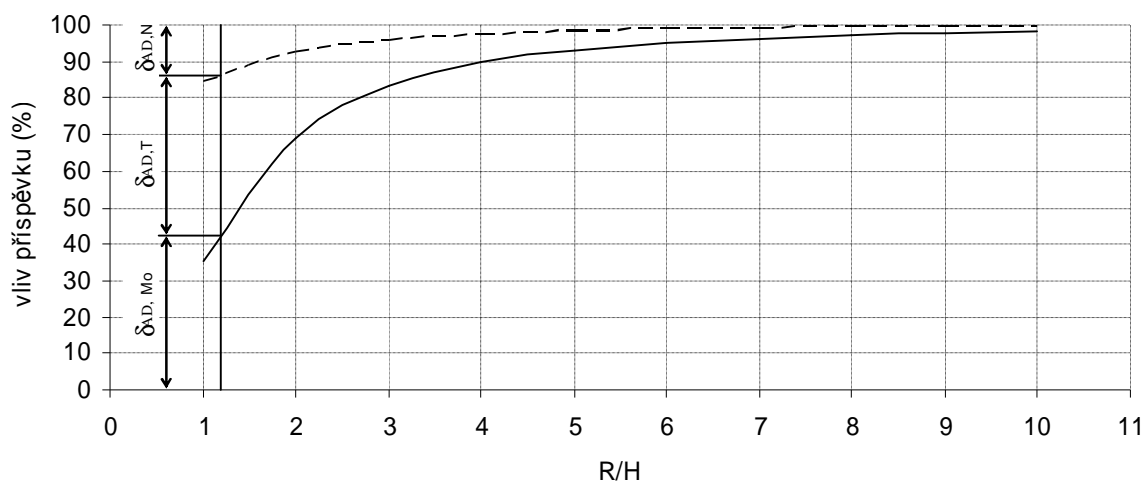
$$d_{AD} = \frac{F \cdot p}{4 \cdot E \cdot b} \cdot \left[ 12 \cdot \left( 1 - \frac{8}{p^2} \right) \cdot \left( \frac{R}{H} \right)^3 + \frac{R}{H} + 3,12 \cdot \frac{R}{H} \right] \quad (3-40)$$

Členy v závorce představují příspěvky ohybového momentu  $M_o$ , normálové síly  $N$  a posouvající síly  $T$  na vzájemné posunutí bodů A a D.

Porovnáme-li vliv VVÚ na vzájemné posunutí bodů A a D (Obr. 3.33.), dojdeme k podobnému závěru jako při řešení s využitím teorie silně zakřivených prutů.

R/H	vliv příspěvku		
	Mo (%)	N (%)	T (%)
1	35,56	15,64	48,8
2	68,82	7,57	23,6
3	83,24	4,07	12,7
4	89,82	2,47	7,71
5	93,24	1,64	5,12
6	95,21	1,16	3,63
7	96,43	0,87	2,7
8	97,25	0,67	2,09
9	97,81	0,53	1,66
10	98,22	0,43	1,35

Vliv příspěvků jednotlivých VVÚ na vzájemné posunutí bodů A a B



Obr. 3.33.

Kde  $d_{AD,Mo}$ ,  $d_{AD,T}$ ,  $d_{AD,N}$  představují příspěvky ohybového momentu  $M_o$ , posouvající síly  $T$  a normálová síly  $N$  na vzájemné posunutí bodů A a D.

Posoudíme-li stejně jako v předchozím příkladě velikost odchylky, které se dopustíme, když vztah pro výpočet napětí vyvolaného ohybovým momentem v silně zakřiveném prutu (2–10) nahradíme vztahem pro výpočet napětí vyvolaného ohybovým momentem ve slabě zakřiveném prutu (2–8) uvidíme, že uzavřený kroužek obdélníkového průřezu můžeme řešit jako slabě zakřivený od poměru  $R/H = 11$ , kde  $R$  značí poloměr zakřivení střednice a  $H$  výšku průřezu.

R/H	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
odchylka $\Delta s$ [%]	61,8	28,5	18,3	13,5	10,6	8,8	7,5	6,5	5,8	5,2	4,7	4,3	3,9	3,7	3,4

Zvolme stejné rozměry jako v příkladě 3.3. a analogickým postupem porovnejme poddajnosti kroužku při výpočtu vzájemného posunutí bodů A a D s využitím teorie silně a slabě zakřivených prutů.

R/H	k silně z.	k slabě z.
1	18,15	20,08
2	79,56	83,02
3	226,57	231,65
4	502,09	508,82
5	949,01	975,39
6	1610,16	1620,19
7	2528,39	2540,09
8	3746,56	3759,92
9	5307,52	5322,54
10	7254,11	7270,80

R/H	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta k$ (%)	10,63	4,35	2,24	1,34	2,78	0,62	0,46	0,36	0,28	0,23

Dospěli jsme k podobným závěrům jako v minulém příkladě. Silně zakřivený prut je méně poddajný než slabě zakřivený prut.

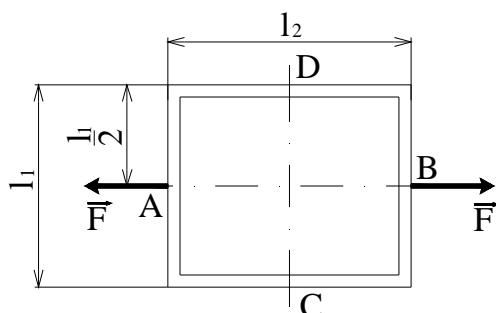
### 3.5. Rovinný rám

Zadání :

Je dán obdélníkový rovinný rám, tvořený profilem obdélníkového průřezu, namáhaný dvojicí sil na tah (viz Obr. 3.34.). Úkolem je stanovit velikosti příspěvků jednotlivých VVÚ na vzájemné posunutí bodů A, B v závislosti na poměru délky přímého úseku střednice  $l$  a charakteristického rozměru průřezu, pro případ  $l_1 = l_2 = l$  a posoudit vliv poměru délek přímých úseků  $l_1$  a  $l_2$  na velikost deformačních příspěvků jednotlivých úseků ve směru působících sil pro případ kdy :

1. použijeme předpoklad tuhých zlomů
2. zlomy nahradíme rotačními vazbami

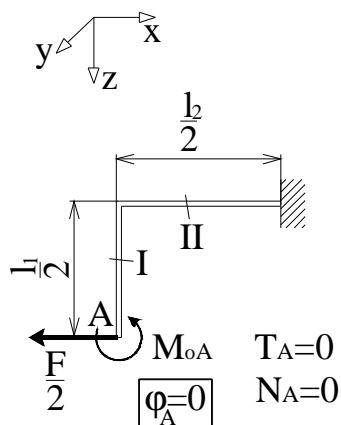
a výsledky porovnat



Obr. 3.34.

#### 3.5.1. Řešení rovinného rámu s využitím předpokladu tuhých zlomů

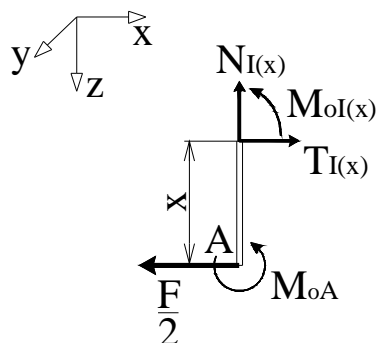
Úloha má dvě osy symetrie, využijeme-li postupu uvedeného v bodě 2.8. postačí když vyřešíme pouze čtvrtinu rámu (viz Obr. 3.35.). Vzájemné posunutí bodů A a B pak bude rovno dvojnásobku posunutí bodu A.



Obr. 3.35.

Průběh VVÚ určíme z podmínek statické rovnováhy prvků uvolněných od volného konce nosníku (Obr. 3.36) a (Obr. 3.37.).

Úsek I :



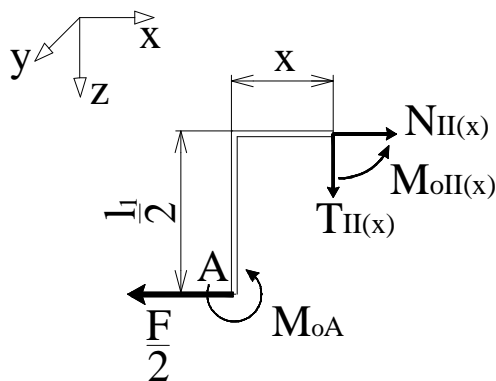
Obr. 3.36.

$$T_I(x) = \frac{F}{2} \quad (3-41)$$

$$N_I(x) = 0 \quad (3-42)$$

$$M_{oI}(x) = \frac{F}{2} \cdot x - M_{oA} \quad (3-43)$$

Úsek II :



Obr. 3.37.

$$N_{II}(x) = \frac{F}{2} \quad (3-44)$$

$$T_{II}(x) = 0 \quad (3-45)$$

$$M_{oII}(x) = \frac{F \cdot a}{4} - M_{oA} \quad (3-46)$$

Ohybový moment  $M_{oA}$  určíme z deformační podmínky zajišťující hladkost střednice v bodě A (Obr. 3.35.). Jedná se o lomený prut jehož střednice je tvořena dvěma příkými úseky, moment  $M_A$  tedy určíme ze vztahu (2 – 29), který podle bodu 2.7. upravíme pro výpočet úhlu natočení .

$$j_A = \int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{M_{oI}(x)}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oI}(x)}{\partial M_{oA}} dx + \int_0^{\frac{l_2}{2}} \frac{M_{oII}(x)}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oII}(x)}{\partial M_{oA}} dx$$

$$0 = \int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{\frac{F}{2} \cdot x - M_A}{E \cdot J_y} \cdot (-1) dx + \int_0^{\frac{l_2}{2}} \frac{\frac{F \cdot a}{4} - M_A}{E \cdot J_y} \cdot (-1) dx$$

$$0 = \frac{1}{E \cdot J_y} \cdot \left( \int_0^{\frac{l_1}{2}} M_A - \frac{F}{2} \cdot x dx + \int_0^{\frac{l_2}{2}} M_A - \frac{F \cdot a}{4} dx \right)$$

odtud

$$M_{oA} = \frac{F \cdot l_1 \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} + 2 \right)}{8 \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} + 1 \right)} \quad (3-47)$$

Dosadíme-li za ohybový moment  $M_{oA}$  do vztahů (3 – 43) a (3 – 46) obdržíme průběh ohybového momentu  $M_o(x)$  v úsecích I a II

$$M_{oI}(x) = \frac{F}{2} \cdot x - \frac{F \cdot l_1 \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} + 2 \right)}{8 \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} + 1 \right)} \quad (3-48)$$

$$M_{oII}(x) = \frac{F \cdot a}{4} - \frac{F \cdot l_1 \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} + 2 \right)}{8 \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} + 1 \right)} \quad (3-49)$$

Vzájemné posunutí bodů A a B určíme ze vztahu (2–29) do něhož dosadíme vztahy (3–41), (3–42), (3–44), (3–45), (3–48) a (3–49)

$$\begin{aligned}
 d_{AB} = 2u_A = & 2 \int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{M_{ol}(x)}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{ol}(x)}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} dx + 2 \int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{b \cdot T_l(x)}{G \cdot S} \cdot \frac{T_l(x)}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} dx + 2 \int_0^{\frac{l_2}{2}} \frac{M_{oll}(x)}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{oll}(j)}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} dx + \\
 & + 2 \int_0^{\frac{l_2}{2}} \frac{N_{ll}(x)}{E \cdot S} \cdot \frac{N_{ll}(x)}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} dx \\
 d_{AB} = & \frac{2}{E \cdot J_y} \cdot \int_0^{\frac{l_1}{2}} \left( \frac{F}{2} \cdot x - \frac{F \cdot l_1 \cdot \left(\frac{l_1}{l_2} + 2\right)}{8 \cdot \left(\frac{l_1}{l_2} + 1\right)} \right) \cdot \left( x - \frac{l_1 \cdot \left(\frac{l_1}{l_2} + 2\right)}{4 \cdot \left(\frac{l_1}{l_2} + 1\right)} \right) dx + \frac{2 \cdot b \cdot F}{2 \cdot G \cdot S} \cdot \int_0^{\frac{l_1}{2}} 1 dx + \\
 & + \frac{2}{E \cdot J_y} \cdot \int_0^{\frac{l_2}{2}} \left( \frac{F \cdot a}{4} - \frac{F \cdot l_1 \cdot \left(\frac{l_1}{l_2} + 2\right)}{8 \cdot \left(\frac{l_1}{l_2} + 1\right)} \right) dx + \frac{2 \cdot F}{2 \cdot E \cdot S} \int_0^{\frac{l_2}{2}} 1 dx
 \end{aligned}$$

Po integraci s použitím Maple a dosazení:

- $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + m)}$
- nosník má obdélníkový průřez  $J_y = \frac{b \cdot H^3}{12}$ ,  $S = b \cdot H$ ,  $\beta = 1,2$
- materiál nosníku je ocel  $\mu = 0,3$

obdržíme vztah pro vzájemné posunutí bodů A a B

$$d_{AB} = \frac{F}{2 \cdot E \cdot b} \cdot \left[ \frac{3}{H^3} \cdot \left( \frac{l_1^3}{3} - \frac{l_1^3 \cdot \left(\frac{l_1}{l_2} + 2\right)}{2 \cdot \left(\frac{l_1}{l_2} + 1\right)} + \frac{l_1^3 \cdot \left(\frac{l_1}{l_2} + 2\right)^2}{4 \cdot \left(\frac{l_1}{l_2} + 1\right)^2} + l_2 \cdot \left( l_1 - \frac{l_1 \cdot \left(\frac{l_1}{l_2} + 2\right)}{2 \cdot \left(\frac{l_1}{l_2} + 1\right)} \right) \right) + \frac{l_2}{H} + 3,12 \cdot \frac{l_1}{H} \right] \quad (3-50)$$

Členy v závorce vyjadřují příspěvky ohybového momentu  $M_o$ , normálové síly  $N$  a posouvající síly  $T$  na vzájemné posunutí bodů A a B.

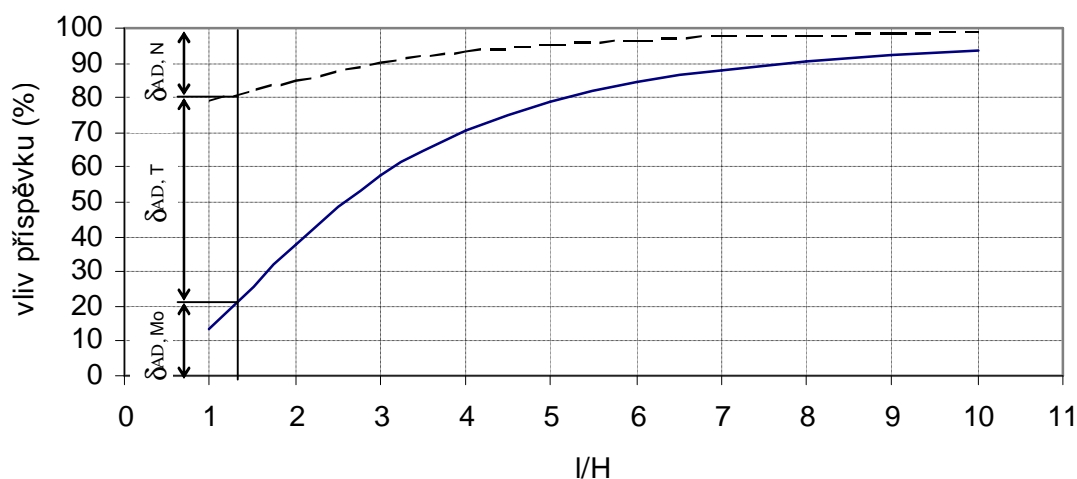
Velikost příspěvků jednotlivých VVÚ na vzájemné posunutí bodů A a B je závislá na poměru délky střednice přímého úseku  $l$  a výšky průřezu  $H$ .

Zvolme  $l_1 = l_2 = l$  a porovnejme vlivy příspěvků jednotlivých VVÚ na vzájemné posunutí bodů A a B v závislosti na poměru  $l/H$  (Obr. 3.38.) vidíme, že při  $l/H=1$  má největší vliv na

vzájemné posunutí bodu A a B příspěvek od posouvající síly  $T$ , se zvyšující se hodnotou  $l/H$  však narůstá vliv deformačního příspěvku způsobeného ohybovým moment  $M_o$ , v porovnání s vlivy ostatních příspěvků od ostatních VVÚ.

l/H	vliv příspěvku		
	$M_o$ (%)	$N$ (%)	$T$ (%)
1	13,17	21,07	65,75
2	37,76	15,11	47,13
3	57,72	10,26	32,02
4	70,82	7,08	22,1
5	79,13	5,06	15,8
6	84,52	3,76	11,72
7	88,14	2,88	8,98
8	90,66	2,27	7,07
9	92,47	1,83	5,7
10	93,82	1,5	4,68

**Vliv příspěvků jednotlivých VVÚ na vzájemné posunutí bodů A a B**



Obr.3.38.

Kde  $d_{AB,Mo}$ ,  $d_{AB,T}$ ,  $d_{AB,N}$  představují vlivy ohybového momentu  $M_o$ , posouvající síly  $T$  a normálové síly  $N$  na vzájemné posunutí bodů A a B.

Nyní posuďme, jak poměr délek úseků  $l_1$  a  $l_2$  ovlivní podíl jednotlivých úseků na vzájemném posunutí bodů A a B. Zvolme celkovou délku střednice rámu  $l_s = 4m$ , výška průřezu bude  $H = 0,01m$  a poměr délek úseků  $\frac{l_1}{l_2} \in \langle 0,25; 4 \rangle$ . Ve vztahu (3–50) od sebe oddělíme deformační příspěvky vztahující se k úsekům  $l_1$  a  $l_2$  vztah (3–51). Velikost podílu na deformaci pak vyjádříme ve tvaru:



$$\Delta_{l_1} = \frac{100 \cdot d_{l_1, F}}{d_{l_1, F} + d_{l_2, F}}$$

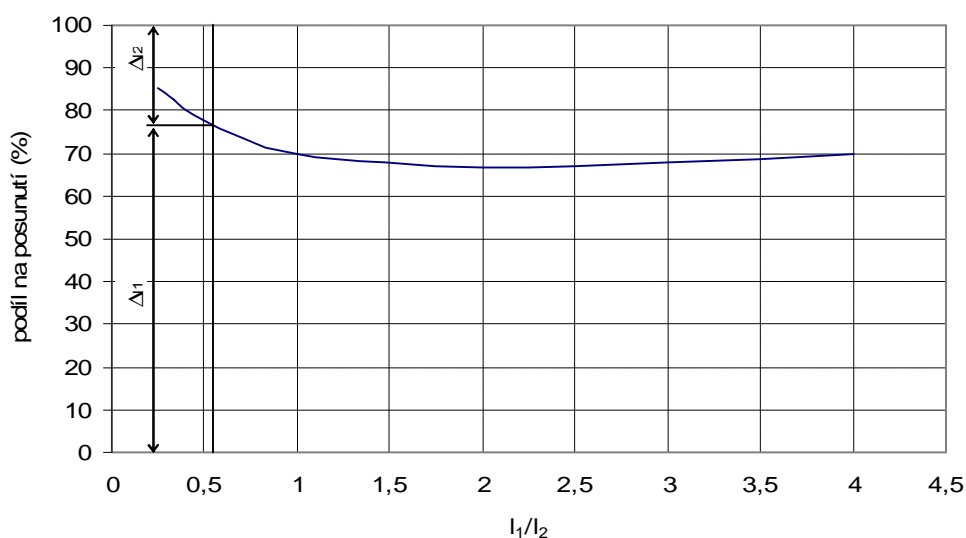
$$\Delta_{l_2} = \frac{100 \cdot d_{l_2, F}}{d_{l_1, F} + d_{l_2, F}}$$

$$d_{AB} = d_{l_1, F} + d_{l_2, F}$$

$$d_{AB} = \frac{F}{2 \cdot E \cdot b} \cdot \left[ \frac{3}{H^3} \cdot \left( \frac{l_1^3}{3} - \frac{l_1^3 \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} + 2 \right)}{2 \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} + 1 \right)} + \frac{l_1^3 \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} + 2 \right)^2}{4 \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} + 1 \right)^2} \right) + 3,12 \cdot \frac{l_1}{H} \right] + \frac{F}{2 \cdot E \cdot b} \cdot \left[ \frac{3 \cdot l_2}{H^3} \cdot \left( l_1 - \frac{l_1 \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} + 2 \right)}{2 \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} + 1 \right)} \right)^2 + \frac{l_2}{H} \right] \quad (3-51)$$

$l_1/l_2$	podíl na deformaci (%)	
	$\Delta_{l_1}$	$\Delta_{l_2}$
0,25	85,66	14,34
0,333	82,60	17,40
0,5	77,75	22,25
1	70,00	30,00
2	66,67	33,33
3	67,87	32,13
4	70,01	29,99

**Porovnání podílů deformačních příspěvků jednotlivých úseků ve směru působící síly na vzájemné posunutí bodů A a B**



Obr. 3.39.

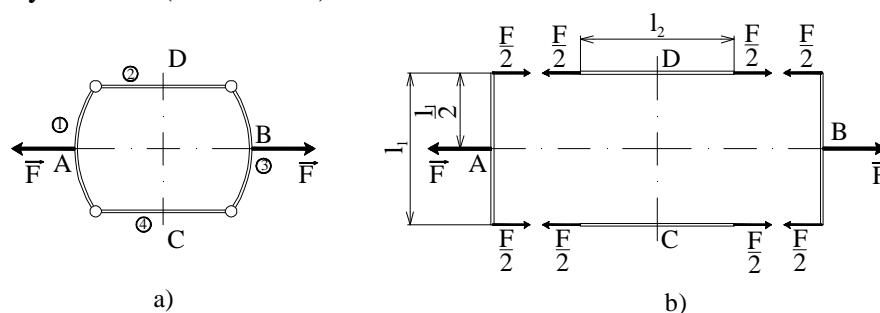
Z porovnání (Obr. 3.39.) plyne, že vliv úseků  $l_2$  na vzájemné posunutí bodů A a B nejprve narůstá až do poměru délek úseků  $\frac{l_1}{l_2} \approx 2$  a pak pozvolně klesá. Hodnota poměru  $\frac{l_1}{l_2}$ , při které je vliv deformačního příspěvku úseku  $l_2$  na vzájemné posunutí bodů A a B maximální, je závislá na výšce průřezu  $H$ . Analyzujme tedy, jak pro vybrané poměry  $\frac{l_1}{l_2}$  ovlivní výška průřezu  $H$  podíly deformačních příspěvků úseků  $l_1$  a  $l_2$  na vzájemném posunutí bodů A a B.

H (m)	$l_1/l_2=0,25$		$l_1/l_2=1$		$l_1/l_2=4$	
	podíl na deformaci (%)					
	$\Delta_{l_1}$	$\Delta_{l_2}$	$\Delta_{l_1}$	$\Delta_{l_2}$	$\Delta_{l_1}$	$\Delta_{l_2}$
0,10	71,33	28,57	70,35	29,65	70,72	29,28
0,05	81,01	17,40	70,09	29,91	70,18	29,82
0,01	85,66	14,34	70,00	30,00	70,01	29,99
0,005	85,83	14,17	70,00	30,00	70,00	30,00

Z provedené analýzy vyplývá, že výška průřezu  $H$  ovlivňuje velikosti podílů úseků  $l_1$  a  $l_2$  na vzájemném posunutí bodů A a B pouze v případě kdy je úsek  $l_1$  výrazně kratší než úsek  $l_2$ .

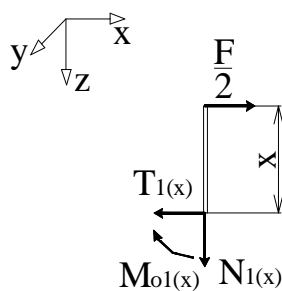
### 3.5.2. Řešení rovinného rámu v případě nahrazení zlomů rotačními vazbami

Nahradíme-li zlomy rotačními vazbami, bude se rám při zatížení deformovat podle (Obr. 3.40.a). Pruty 1 a 3 budou namáhány kombinací ohybu a smyku, pruty 2 a 4 budou namáhány prostým tahem (Obr. 3.40.b).



Obr. 3.40.

Prut 1 : Průběh VVÚ určíme z podmínek statické rovnováhy prvku uvolněného z prutu 1 (Obr. 3.41.).



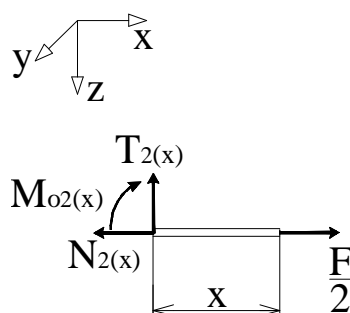
Obr. 3.41.

$$T_1(x) = \frac{F}{2} \quad (3-52)$$

$$N_1(x) \quad (3-53)$$

$$M_{o1}(x) = -\frac{F}{2} \cdot x \quad (3-54)$$

Prut 2 : průběh VVÚ určíme z podmínek statické rovnováhy prvku uvolněného z prutu 2 (Obr. 3.42.).



Obr. 3.42.

$$N_{2I}(x) = \frac{F}{2} \quad (3-55)$$

$$T_2(x) = 0 \quad (3-56)$$

$$M_{o2}(x) = 0 \quad (3-57)$$

Při řešení deformačního posunutí bodu A využijeme symetrie prutu 1, vzájemné posunutí bodů A a B je dáno vztahem

$$d_{AB} = 2 \cdot d_1 + d_2 \quad (3-58)$$

kde  $d_1$  i  $d_2$  se vypočítá ze vztahu (2-29) do něhož dosadíme vztahy (3-52), (3-53) a (3-54) pro výpočet  $d_1$  a vztahy (3-55), (3-56) a (3-57) pro výpočet  $d_2$

$$d_1 = \int_g \frac{M_{o1}(x)}{E \cdot J_y} \cdot \frac{\partial M_{o1}(x)}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} dx + \int_g \frac{b \cdot T_1(x)}{G \cdot S} \cdot \frac{\partial T_1(x)}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)}$$

$$d_1 = \int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{-F \cdot x}{2 \cdot E \cdot J_y} \cdot (-x) dx + \int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{b \cdot F}{2 \cdot G \cdot S} \cdot 1 dx = \frac{F}{2 \cdot E \cdot J_y} \cdot \int_0^{\frac{l_1}{2}} x^2 dx + \frac{b \cdot F}{2 \cdot G \cdot S} \int_0^{\frac{l_1}{2}} dx =$$

$$= \frac{F \cdot l_1^3}{2 \cdot 24 \cdot E \cdot J_y} + \frac{b \cdot F \cdot l_1}{2 \cdot 2 \cdot G \cdot S}$$

- po dosazení  $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + m)}$
- nosník má obdélníkový průřez  $J_y = \frac{b \cdot H^3}{12}$ ,  $S = b \cdot H$ ,  $\beta = 1,2$
- materiál nosníku je ocel  $\mu = 0,3$

$$d_1 = \frac{12 \cdot F \cdot l_1^3}{48 \cdot E \cdot b \cdot H^3} + \frac{2 \cdot (1 + m) \cdot b \cdot F \cdot l_1}{4 \cdot E \cdot b \cdot H} = \frac{F}{4 \cdot E \cdot b} \cdot \left[ \left( \frac{l_1}{H} \right)^3 + 3,12 \cdot \frac{l_1}{H} \right] \quad (3-59)$$

$$d_2 = \int_g \frac{N_{2I}(x)}{E \cdot S} \cdot \frac{\partial N_2(x)}{\partial \left( \frac{F}{2} \right)}$$

$$= \int_0^{\frac{l_2}{2}} \frac{F}{2 \cdot E \cdot S} \cdot 1 dx + 0 = \frac{F}{2 \cdot E \cdot S} \int_0^{\frac{l_2}{2}} dx = \frac{F \cdot l_2}{2 \cdot E \cdot S}$$

- nosník má obdélníkový průřez  $S = b \cdot H$
- materiál nosníku je ocel  $\mu = 0,3$

$$d_2 = \frac{F}{4 \cdot E \cdot b} \cdot \frac{l_2}{H} \quad (3-60)$$

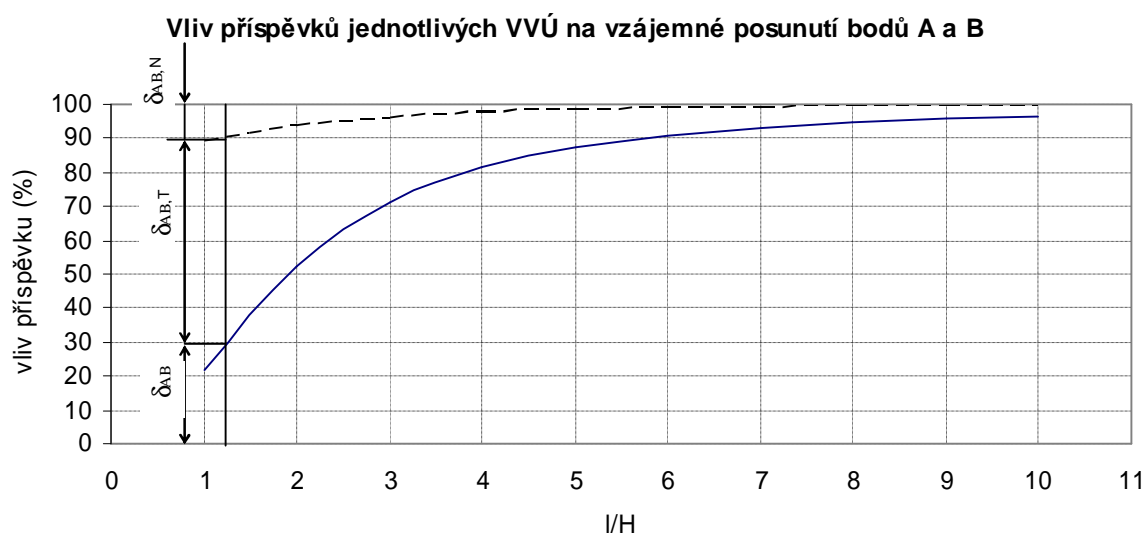
Vzájemné posunutí bodů A a B dostaneme dosazením vztahů (3-59) a (3-60) do vztahu (3-58)

$$d = \frac{F}{4 \cdot E \cdot b} \cdot \left[ 2 \cdot \left( \frac{l_1}{H} \right)^3 + \frac{l_2}{H} + 6,24 \cdot \frac{l_1}{H} \right] \quad (3-61)$$

Členy v závorce vyjadřují příspěvky ohybového momentu  $M_o$ , normálové síly  $N$  a posouvající síly  $T$  na vzájemné posunutí bodů A a D.

Zvolíme-li podobně jako v předchozím příkladě  $l_1 = l_2 = l$  a porovnáme vliv příspěvků jednotlivých VVÚ na vzájemné posunutí bodů A a B v závislosti na poměru  $l/H$  (Obr. 3.43.), dospějeme k podobným závěrům jako případě kdy jsme u rovinného rámu předpokládali tuhé zlomy.

l/H	vliv příspěvku		
	M <sub>o</sub> (%)	N (%)	T (%)
1	21,65	10,82	67,53
2	52,49	6,56	40,94
3	71,32	3,96	24,72
4	81,55	2,55	15,9
5	87,35	1,75	10,9
6	90,86	1,26	7,87
7	93,12	0,95	5,93
8	94,65	0,74	4,61
9	95,72	0,59	3,69
10	96,51	0,48	3,01



Obr. 3.43.

Kde  $d_{AB,Mo}$ ,  $d_{AB,T}$ ,  $d_{AB,N}$  označují příspěvky ohybového momentu  $M_o$ , posouvající síly  $T$  a normálové síly  $N$  na vzájemné posunutí bodů A a B.

Nyní posuďme, jak poměr délek úseků  $l_1$  a  $l_2$  ovlivní podíl jednotlivých úseků na celkové deformaci. Zvolme stejné vstupní hodnoty jako v předchozím příkladě. Ve vztahu (3–61) od sebe oddělíme deformační příspěvky vztahující se k úsekům  $l_1$  a  $l_2$  vztah (3–62). Velikost podílu úseků  $l_1$  a  $l_2$  na vzájemné posunutí bodů A a B, pak určíme podobným postupem jako v předchozím příkladě.

$$d_{AB} = d_{l_1,F} + d_{l_2,F}$$

$$d = \frac{F}{4 \cdot E \cdot b} \cdot \left[ 2 \cdot \left( \frac{l_1}{H} \right)^3 + 6,24 \cdot \frac{l_1}{H} \right] + \frac{F}{4 \cdot E \cdot b} \cdot \frac{l_2}{H} \quad (3-62)$$

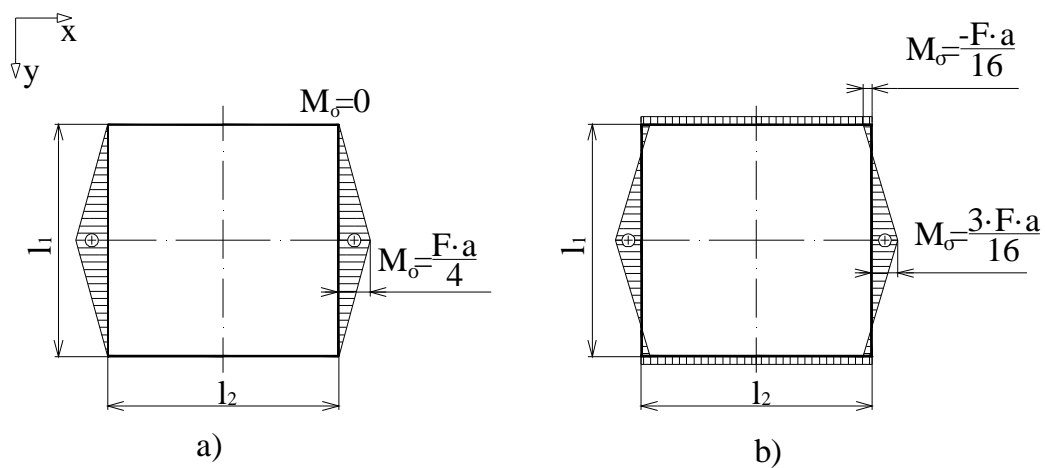
$l_1/l_2$	podíl na vzájemném posunutí bodů A a B	
	$\Delta_{l_1}$	$\Delta_{l_2}$
0,25	99,72	0,28
0,333	99,87	0,13
0,5	99,95	0,05
1	99,99	0,01
2	100	0
3	100	0
4	100	0

Z porovnání je vidět, že při daných vstupních podmínkách se úseky  $l_2$  se chovají téměř jako dokonale tuhé. Podobně jako v předchozím příkladě analyzujeme jak výška průřezu  $H$  ovlivní podíly úseků  $l_1$  a  $l_2$  na vzájemném posutí bodů A a B.

H (m)	$l_1/l_2=0,25$		$l_1/l_2=1$		$l_1/l_2=4$	
	podíl na deformaci (%)					
	$\Delta_{l_1}$	$\Delta_{l_2}$	$\Delta_{l_1}$	$\Delta_{l_2}$	$\Delta_{l_1}$	$\Delta_{l_2}$
0,10	90,53	9,47	99,52	0,48	99,95	0,05
0,05	97,21	2,89	99,88	0,12	99,99	0,01
0,01	99,88	0,12	100,00	0,00	100,00	0,00
0,005	99,97	0,03	100,00	0,00	100,00	0,00

Z provedené analýzy plynou podobné závěry jako v předchozím příkladě. Tato analýza nám však také ukázala, že při určování vzájemného posunutí bodů A a B u rovinného rámu za předpokladu nulové tuhosti zlomů má smysl uvažovat deformační příspěvky úseků  $l_2$  pouze v případě, kdy je úsek  $l_1$  výrazně kratší než úsek  $l_2$ .

Porovnejme nyní výsledky (3 – 50) a (3 – 61) společně. Deformační příspěvky od normálové a posouvající síly jsou v obou případech stejně velké. Výpočet vzájemného posunutí bodů A a B se tedy liší pouze ve velikosti deformačního příspěvku od ohybového momentu. V případě, kdy nahradíme zlomy rotačními vazbami, působí ohybový moment pouze na úsecích  $l_1$  (viz Obr. 3.44.a), veškerá energie napjatosti od ohybového momentu je tedy akumulována pouze v těchto úsecích. Úseky  $l_2$  jsou namáhány prostým tahem a prodlužují se ve směru osy  $x$ . Když však budeme předpokládat tuhé zlomy, budou ohybovým momentem namáhány kromě úseků  $l_1$  i úseky  $l_2$  (Obr. 3.44.b), tyto úseky se tedy potom nedeformují pouze ve směru zatěžující síly  $F$ , ale současně se i prohýbají. Celková deformace se tedy rozloží do směrů  $x$  a  $y$  a vzájemné posunutí bodů A a B ve směru osy  $x$  bude menší. To je důvod, proč je příspěvek na vzájemné posunutí bodů A a B od ohybového momentu větší v případě, kdy nahradíme zlomy rotačními vazbami.



Obr. 3.44.

## 4. ZÁVĚREČNÉ SHRNUÍ

Z řešení prímých prutů (příklady 3.1. a 3.2.) plyne, že s narůstající hodnotou poměru délky střednice prutu  $l$  a průměru průřezu nosníku  $d$  vliv příspěvku posouvající síly  $T$  na deformační posuv zvoleného bodu, v porovnání s vlivem příspěvku ohybového momentu  $M_o$ , klesá. V příkladě 3.1.1. kdy je nosník na dvou podporách zatížený v polovině osamělou silou má deformační příspěvek posouvající síly  $T$ , při stejném poměru  $\frac{l}{d}$ , větší vliv na posuv zvoleného bodu než v příkladě 3.1.2., kdy je stejný nosník zatížený po celé délce spojitě rozloženým zatížením. V případě vetknutého nosníku (příklady 3.2.1. a 3.2.2.) je tomu naopak, vliv deformačního příspěvku posouvající síly  $T$  na posutí zvoleného bodu je vyšší v případě zatížení nosníku po celé délce spojitě rozloženým zatížením. Způsob uložení ovlivňuje především vliv deformačního příspěvku posouvající síly  $T$  při malých hodnotách poměru  $\frac{l}{d}$ . U nosníku uloženého na dvou podporách je vliv příspěvku posouvající síly  $T$  na deformační posunutí zvoleného bodu střednice vyšší než u vetknutého nosníku.

U zakřivených prutů (příklady 3.3. a 3.4.) vliv deformačního příspěvku ohybového momentu  $M_o$  na posunutí zvoleného bodu narůstá, v porovnání s vlivy příspěvků od ostatních VVÚ, v závislosti na poměru poloměru zakřivení střednice  $R$  a výšky průřezu  $H$ . Vliv deformačního příspěvku ohybového momentu  $M_o$  na posunutí zvoleného bodu je vyšší v případě výpočtu podle teorie silně zakřivených prutů.

U uzavřených rámu je vliv deformačních příspěvků jednotlivých VVÚ na posunutí zvoleného bodu závislý jednak na poměru délky střednice  $l$  a výšky průřezu  $H$ , ale také na poměru délek střednic jednotlivých úseků  $l_1$  a  $l_2$ . S rostoucí hodnotou poměru  $\frac{l}{H}$  roste i vliv deformačního příspěvku ohybového momentu  $M_o$ , v porovnání s vlivy příspěvků ostatních VVÚ, na deformační posunutí zvoleného bodu. Rychlost nárůstu vlivu deformačního příspěvku ohybového momentu na posunutí zvoleného bodu je závislá na poměru délek úseků střednic  $\frac{l_1}{l_2}$ .

Použijeme-li při výpočtu rovinného rámu předpoklad tuhých zlomů, mají nezatížené úseky přibližně třetinový podíl na deformaci. Budeme-li však předpokládat nulovou tuhost zlomů, nemusíme ve většině případů deformaci nezatížených úseků uvažovat.



**Vybrané symboly a označení**

- v pořadí tak jak jsou uvedeny v textu

$\Pi$	-	soustava silových působení
$\Omega$	-	osamělá síla
$M$	-	osamělá silová dvojice
$\gamma$	-	křivka
$A$	-	deformační práce
$u, w, \delta,$	-	deformační posuvy
$\varphi$	-	deformační natočení
$W$	-	energie napjatosti
$F_d$	-	doplňková síla
$M_d$	-	doplňkový moment
$\omega$	-	řez
$M_o$	-	ohybový moment
$T$	-	posouvající síla
$N$	-	normálová síla
$\sigma$	-	normálové napětí
$\tau$	-	smykové napětí
$U$	-	lineární moment průřezu
$J$	-	kvadratický moment průřezu
$b$	-	šířka průřezu
$R, r, \rho$	-	poloměry
$e$	-	excentricita
$V$	-	objem
$S$	-	plocha
$E$	-	modul pružnosti materiálu v tahu
$G$	-	modul pružnosti materiálu ve smyku
$x, z, s, a, l$	-	vzdálenosti
$\beta$	-	bezrozměrný součinitel
$\mu$	-	Poissonovo číslo
$d$	-	průměr nosníku
$H$	-	výška průřezu nosníku

**Použitá literatura**

- [1] Janíček, P., Ondráček, E., Vrbka, J., Burša, J.: Mechanika těles - pružnost a pevnost I skripta FSI – VUT Brno 2004, ISBN 80-214-2592-X
- [2] Janíček, P., Petruška, J.: Pružnost a pevnost II – úlohy do cvičení skripta FSI – VUT Brno 2002, ISBN 80-214-2335-8